$$\int$$

INTEGRALES

1- DEFINICION. INTEGRALES INMEDIATAS

Dada una función f(x) llamamos **función primitiva** de f(x) a cualquier otra función F(x) cuya derivada sea f(x): F´(x) = f(x)

Ejemplo:

Una primitiva de $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3$, ya que $F´(x) = 3x^2 = f(x)$.

Otra primitiva es $x^3 + 5$, pues su derivada es, también, $3x^2$. También es primitiva de $3x^2$, $F(x) = x^3 + C$, para cualquier valor de la constante C.

En general, toda función f(x) admite infinitas primitivas que se diferencian entre sí solo por una constante, es decir, si F(x) es primitiva de f(x) también lo será F(x) + C $\forall C = \text{cte.}$, pues

$$(F(x) + C)´ = F´(x) = f(x)$$

En consecuencia, para hallar las primitivas de f(x) hallaremos una de ellas, F(x), y escribiremos F(x) + C, donde C representará en todo lo que sigue una constante cualquiera que se llama **constante de integración.**

El problema que vamos a considerar es: *Dada una función hallar sus primitivas,* es decir, *Dado un diferencial f(x) dx, hallar la función y = F(x) tal que dy = f(x)dx.*

Ejemplos:

(a) $\int 3x^2 dx = x^3 + C$,

ya que la derivada de $x^3 + C$ es $3x^2 + 0 = 3x^2$

(b) $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$, pues al derivar $\dfrac{x^3}{3}$ da $\dfrac{3x^2}{3} = x^2$

(c) $\int x^4 dx = \dfrac{x^5}{5} + C$, ídem .

En general, $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, excepto cuando n = -1, pues entonces: $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{1}{x} dx = Lx + C$ pues la derivada de Lx es $\dfrac{1}{\mathrm{x}}$.

Propiedades

(1) *La integral de una suma es la suma de las integrales:*

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx"$$

(2) *La integral de una constante* k *por una función,* f*, es la integral de* f *multiplicada por* k*:*

$$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx \ "$$

Ejemplos:

(a) $\int (3x^2 + 5x^4)dx = \int 3x^2 dx + \int 5x^4 dx = x^3 + x^5 + C$

(Basta poner una cte.)

(b) $\int 15x^3 dx = 15 \int x^3 dx = 15 \dfrac{x^4}{4} + C$

De las derivadas inmediatas obtenemos:

(a) $\int e^x dx = e^x + C$, pues la derivada de e^{x} es e^{x}

(b) $\int sen x dx = -\cos x + C$,

pues la derivada de -cos x es -(-sen x), es decir, sen x .

(c) $\int 5^x dx = \dfrac{5^x}{L5} + C$, pues la derivada de 5^x es $5^x L5$, por lo que la de $\dfrac{5^x}{L5}$ es $\dfrac{5^x L5}{L5} = 5^x$

Esto es cierto cambiando el 5 por cualquier número.

Así obtenemos unas cuantas integrales que serán la base para calcular todas las demás. Estas son las del siguiente cuadro:

INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = Lx + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C \ \forall a \in R$$

$$\int sen x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = sen x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C \qquad \int \frac{dx}{sen^2 x} = -ctg\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc.tg\, x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc.sen x + C$$

Que se completa, según las propiedades citadas con:

LINEALIDAD DE LA INTEGRAL

$$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Ejemplos:

(a) $\int x^6 dx = \dfrac{x^7}{7} + C$

(b) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

(c) $\int x^2 \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \dfrac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$ $\int x^2 \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \dfrac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$

(d) $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \int x^{\frac{-1}{2}} dx = \dfrac{1}{2} \dfrac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + C$

(e) $\int \dfrac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx = \int \left(\dfrac{x^4}{x^2} - \dfrac{10x^2}{x^2} + \dfrac{5}{x^2} \right) dx =$

$= \int (x^2 - 10 + 5x^{-2}) dx = \int x^2 dx - 10 \int dx + 5 \int x^{-2} dx =$

$= \dfrac{x^3}{3} - 10x + 5\dfrac{x^{-1}}{-1} = \dfrac{x^3}{3} - 10x - \dfrac{5}{x} + C,$ ya que : $\int dx = x + C,$

pues la diferencial de x es dx.

(f) $\int (5x + senx) dx = \dfrac{5x^2}{2} - \cos + C$

(g) $\int \left(\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = arctgx - arcsenx + C$

(h) $\int \dfrac{e^x + 1}{2} dx = \dfrac{1}{2} \left(e^x + x \right) + C$

2- CAMBIO DE VARIABLE

Naturalmente nos encontraremos con funciones más complicadas cuya integral no salga directamente de las inmediatas. En esos casos nos interesa reducir el problema a una integral inmediata mediante un **cambio de variable**, en la siguiente forma :

Por ejemplo para calcular $\mathrm{I} = \int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx$, vemos que la derivada del denominador es el numerador, entonces si llamamos **t** (nueva variable) al denominador tenemos :

$$x^3 + x = t \; x^3 + x = t$$

diferenciando : $(3x^2+1)dx = dt$ y llevando estos resultados a la integral:

I= $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C$ y sustituyendo **t** por su valor, es decir, **deshaciendo el cambio de variable:**

$$\mathrm{I} = Ln(x^3 + x) + C$$

En general, siempre que tengamos un cociente con el numerador igual a la derivada del denominador , $\frac{f'(x)}{f(x)}$, su integral será el logaritmo neperiano de f(x) , sin más que hacer f(x)= t

La técnica del cambio de variable es siempre la misma y viene resumida en este cuadro:

CAMBIO DE VARIABLE

- Elegir la expresión que vamos a igualar a la nueva variable t.
- Hallar dx.
- Sustituir en la integral las x por las t y dx por su equivalente en dt.
- Resolver la nueva integral.
- Deshacer el cambio.

La dificultad del problema es elegir el cambio de variable. Para las integrales complicadas veremos más adelante unos cambios standard que nos las resolverán, pero con complicación de cálculos.

En los problemas más sencillos no daremos una tabla de cambios, pues existen muchas posibilidades, incluso en la misma integral. Lo que se hace es probar distintos cambios hasta obtener una integral sencilla. La práctica enseña a elegir en cada caso el cambio más cómodo, por lo que es necesario hacer muchos ejercicios para dominar la técnica del cambio de variable que nos resuelve numerosas integrales .

Ejemplos:

(a) I= $\int (x+4)^3 dx$; Cambio: x + 4 = t

dx = dt

queda: $I = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(x+4)^4}{4} + C$

(b) I= $\int \frac{dx}{x+5}; x+5=t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t} = lt = l(x+5) + C$

(c) I= $\int (6x+2)^4 dx; 6x+2=t \Rightarrow 6dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{6}$

$$I = \int t^4 \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{6}\frac{t^5}{5} = \frac{(6x+2)^5}{30} + C$$

(d) I= $\int \sqrt{3-4x}\,dx; 3-4x=t \Rightarrow -4dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{4}$

$$I = \int \sqrt{t}\frac{dt}{-4} = -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{4\sqrt{t}} = \frac{-1}{4\sqrt{3-4x}} + C$$

(e) I= $\int \cos 6x\,dx; 6x = t => dx = \frac{dt}{6}$

$$\text{I}= \frac{1}{6}\int sent dt = \frac{1}{6}\cos t = \frac{1}{6}\cos 6x + C$$

(f) $\text{I}= \left(x^2+5\right)^8 x dx \; ; x^2+5 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow x\,dx = \dfrac{dt}{2}$

$$\text{I}= t^8\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^9}{9} + c\,\frac{\left(x^2+5\right)^9}{18} + c$$

(g) $\text{I}= \int senx\cos x \; dx ; senx = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$I = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{sen^2 x}{2} + C$$

(h) $I = \int \dfrac{x dx}{3-x^2} ; 3 - x^2 = t \Rightarrow x dx = -\dfrac{dt}{2}$

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} Lt = -\frac{1}{2} L\left(3-x^2\right) + C$$

(i) $I = \int \dfrac{dx}{1+4x^2} ; \; 2x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2}$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arc.tgt = \frac{1}{2} arc.tg 2x + C$$

(j) $I = \int \dfrac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} ; \sqrt{x} = t \Rightarrow \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$

$$I = \int et \cdot 2dt = 2\int e^t dt = 2e^t = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

(k) $\text{I} = \int \dfrac{senx + \cos x}{\cos x} dx = \underline{\int \dfrac{senx}{\cos x}} dx + \underline{\int dx} = \text{I}_1 + \text{I}_2$

$$\text{I}_1 = \int \frac{senx}{cosx} dx ; cosx = t \Rightarrow - senxdx = dt$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -lnt = -ln(cosx) + C$$

$\text{I}_2 = \int dx = x + C$ Luego, $\text{I} = -ln(\,cosx\,) + x + C$

(l) $I = \int 2xe^{x^2}\cos xe^{x^2}dx; e^{x^2} = t \Rightarrow 2xe^{x^2}dx = dt$

$I = \int \cos tdt = sent + C = sene^{x^2} + C$

(m) $I = \int e^{\cos x} senxdx = -e^{\cos x} + C$, con el cambio $cosx = t$

Ejercicios:

1) I =

(17) $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx;$

(18) $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx;$

(19) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}; e^x = t;$

(20) $\int tgxdx;$

(21) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+1}; x^4 = t;$

(22) $\int xe^{-x^2}dx;$

(23) $\int e^{tgx} \bullet \frac{dx}{\cos^2 x};$

(24) $\int \frac{\sqrt[3]{1+Lx}}{x}dx; Lx = t;$

(25) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}; x = \frac{1}{t};$

(26) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}; \sqrt{x+1} = t;$

(27) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx; x = asent;$

(28) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}; x = sent$

3- INTEGRACION POR PARTES

Ciertos tipos de integrales pueden reducirse a otras más sencillas con la fórmula de la

INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$ donde u, v son funciones de x.

Ejemplos:

(a) $I = \int lnx dx$ Hacemos: $Lx = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

Aplicando la fórmula:

$$I = \int lnx \cdot dx = xlnx - \int x\frac{dx}{x} = xlnx - \int xdx =$$

$$x\,ln\,x - x = x(\,ln - 1\,) + C$$

(b) $I = \int x \ln x dx$; $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$xdx = dv \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$I = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= \frac{x^2}{2}ln\,x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}(\,ln\,x - \frac{1}{2}\,) + C$$

(c) $I = \int arcsenxdx ; arcsenx = u \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

$$I = xarcsenx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = xarcsenx + \sqrt{1-x^2} + C$$

4- SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

Cualquier integral con funciones trigonométricas puede resolverse con cambios de variable adecuados, como veremos más adelante. Algunos casos muy frecuentes se resuelven sencillamente aplicando fórmulas de trigonometría.

1

EJEMPLOS

(a) $I=\int \cos^2 x dx$; sabemos que $\forall x \in \Re$ se cumple:

$$\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow$$

$$\int \cos^2 x dx=\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x dx=$$

$$=\frac{1}{2} x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x=\frac{1}{2}x+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+e$$

(b) $I=\int \cos^3 x dx; como \cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$:

$$I=\int \cos x\left(1-sen^2 x\right)dx=\int \cos x dx-\int sen^2 x \cos x dx=$$

$$=\operatorname{sen} x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C$$

haciendo $\cos x = t$ en la 2ª

(c) $I=\int sen 9x sen x dx$

Como: $\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$

Haciendo:

$$\begin{cases} \dfrac{A+B}{2} = 9x \\ \dfrac{A-B}{2} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 10x \\ B = 8x \end{cases} \Rightarrow -2\,\mathrm{sen}\,9\mathrm{x}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{x} = \cos 10\mathrm{x} - \cos 8\mathrm{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen9xsenx = -\frac{1}{2}\left(\cos 10x - \cos 8x\right)$$

Luego:

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\int\left(\cos 10x - \cos 8x\right)dx = -\frac{1}{2}\int \cos 10x dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}\,10\mathrm{x}}{10} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}\,8\mathrm{x}}{8} + \mathrm{C}$$

Las fórmulas trigonométricas más usadas con estos fines son:

$$\mathrm{sen}^2\,\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x} = 1 \quad ; \quad \mathrm{tgx} = \frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{x}}{\cos \mathrm{x}}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\mathrm{x} = \frac{1}{\cos^2\mathrm{x}} \quad ; \quad 1 + \mathrm{ctg}^2\mathrm{x} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\mathrm{x}}$$

sen 2x = 2sen x cos x

cos 2x = $\cos^2$ x – sen^2 x

2sen x cos y = sen (x-y) + sen (x+y)

2sen x sen y =cos (x-y) - cos (x+y)

2cos x cos y =cos (x-y) + cos (x+y)

EJERCICIOS

(48) $\int sen^2 xdx$; (49) $\int sen^3 xdx$

(50) $\int sen^2 x \cos^2 xdx$; (51) $\int \sqrt{1-\cos^2 x}dx$

(52) $\int sen3xsen2xdx$; (53) $\int sen2x \cos 4xdx$

(54) $\int \cos 3x \cos 2xdx$; (55) $\int tg^3 xdx$

5.- INTEGRACIÓN POR RECURRENCIA

Las integrales del tipo $\int x^n e^x dx$, es decir aquellas en que aparece un exponente ó coeficiente genérico **n** pueden hacerse, aplicando reiteradamente la integración por partes, dando una fórmula en la que aparezca la misma integral pero con **n-1 , n-2,** etc. en vez de **n**. En este caso, llamemos:

$I_n = \int x^n e^x dx$; Tomamos $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} = \mathrm{u} \Rightarrow \mathrm{nx}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{dx} = \mathrm{du}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \mathrm{du} \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = \mathrm{v}$

$$\Rightarrow I_n = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$$

pues la integral es la original salvo el exponente de x. Así queda resuelta la integral, pues podemos rebajar el grado hasta $I_0 = \int x^o e^x dx = \int e^x dx = e^x + C$.

Por ejemplo para calcular $I_4 = \int x^4 e^x dx$:

$$\mathrm{I} \quad \begin{cases} I_4 = x^4 e^x - 4I_3 \\ I_3 = x^3 e^x - 3I_2 \\ I_2 = x^2 e^x - 2I_1 \\ I_1 = xe^x - I_0 \\ I_0 = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_4 = x^4 e^x - 4\left[x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right)\right)\right] =$$

$$= e^x\left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 24x - 24\right) + C$$

Veamos otro ejemplo:

$I_n = \int sen^n xdx$

Tomamos: $sen^{n-1}x = u \Rightarrow du = (n-1)sen^{n-2}\cos xdx$

$\mathrm{sen\,xdx} = \mathrm{dv} \Rightarrow \mathrm{u} = -\cos \mathrm{x}$

$$\Rightarrow I_n = -\cos xsen^{n-1}x + (n-1)\int \cos^2 xsen^{n-2}xdx =$$

$$= -\cos xsen^{n-1}x + (n-1)\int\left(1 - sen^2 x\right)sen^{n-2}xdx =$$

$$= -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1)\int sen^{n-2}x dx - (n-1)\int sen^{n} x dx =$$

$$= -\cos x sen^{n-1}x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_{n}$$

Pasando el I_n al otro miembro y despejándolo.

$$I_n = \frac{-\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

que es la fórmula de recurrencia.

Para calcular, por ejemplo, I_4 e I_5:

$$\left.\begin{array}{l} I_4 = \dfrac{-\cos x sen^3 x}{4} + \dfrac{3}{4}I_2 \\ I_2 = \dfrac{-\cos x senx}{4} + \dfrac{1}{4}I_0 \\ I_0 = \int sen^0 x dx = \int dx = x \end{array}\right\} \Rightarrow I_4 = \frac{-\cos x sen^3 x}{4} - \frac{3}{8}\cos x senx - \frac{3}{8}x + C$$

$$\left.\begin{array}{l} I_5 = \dfrac{-\cos x sen^4 x}{5} + \dfrac{4}{5}I_3 \\ I_3 = \dfrac{-\cos x sen^2 x}{3} + \dfrac{2}{3}I_1 \\ I_1 = \int senx dx = -\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow I_5 = \frac{-\cos x sen^4 x}{5} - \frac{4}{15}\cos x sen^2 x - \frac{8}{15}\cos x + C$$

6.-INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Tratamos de integrar cualquier función de la forma$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$:$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x), Q(x) son polinomios en x tales que grado P(x)<grado Q(x). (Si el grado de P(x) es mayor ó igual que el de Q(x) el problema se reduce al anterior sin más que dividir los polinomios).

En estos casos hacemos tres pasos:

1- Hallar las raíces del denominador, Q(x).

2- Descomponer el cociente en fracciones simples de los tipos:$\dfrac{A}{(x-a)}$ para cada raíz real simple, $\dfrac{A}{(x-b)^n}+\dfrac{B}{(x-b)^{n-1}}+\ldots+\dfrac{H}{(x-b)}$ para cada raíz real múltiple **b** de mult. **n,** $\dfrac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ para cada par de raíces complejas $\alpha\pm\beta i$ simples.

Lo equivalente para raíces complejas múltiples.

3- Resolver las integrales de las fracciones simples. Esto quedará claro con algunos **EJEMPLOS**:(a) I=.$\displaystyle\int\frac{5x^2+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

Buscamos la raíces del denominador: $x^3-5x^2+4x=0$ que son 1,4,0 (simples).

Hacemos la descomposición:

...

Calculamos los coeficientes indeterminados A, B, C:

$$\frac{5x^2+2}{x(x-1)(x-4)}=\frac{A(x-1)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2+2=A(x-1)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-1)$$

Esto debe ser verdad para todos los valores de x.

Dando valores a x obtendremos, pues A, B y C:

x = 0 $\qquad 2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

x = 1 $\qquad 7 = -3B \Rightarrow B = -\frac{7}{3}$

x = 4 $\qquad 82 = 12C \Rightarrow C = \frac{41}{6}$

Luego:

$$I = \int \frac{5x^2+2}{x^3-5x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{7}{3}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{41}{6}\int\frac{dx}{x-4} =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{L}x - \frac{7}{3}\mathrm{L}(x-1) + \frac{41}{6}\mathrm{L}(x-4) + C$$

(b) $I = \int \frac{xdx}{x^3+x^2-x-1}; x^3+x^2-x-1=0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1(doble) \end{cases}$

$$\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$x = A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2$$

x = 1 $\qquad 1 = 4C \Rightarrow C = \frac{1}{4}$

x = -1 $\qquad -1 = -2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

x = 0 $\qquad 0 = -A - B + C \Rightarrow B = -A + C \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$

Luego, $I = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} =$

...

(c) $I = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

Las raíces del denominador son complejas:

$\qquad x^2+1=0 \Rightarrow x = \pm i$

$\qquad x^2+2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\,i$

La descomposición será:

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{Px+Q}{x^2+2}$$

$$x^3+x^2+x+2=(Mx+N)(x^2+2)+(Px+Q)(x^2+1)$$

El cálculo de los coeficientes se puede hacer siempre dando valores (como hemos visto) ó por el siguiente método:

Ordenando el 2º miembro:

$$x^3+x^2+x+2=(M+P)x^3+(N+Q)x^2+(2M+P)x+2N+Q$$

Igualando los coeficientes de cada potencia de x:

$$\begin{cases} M+P=1 \\ N+Q=1 \\ 2M+P=1 \\ 2N+Q=2 \end{cases} \Rightarrow (resolviendo\, el\, sistema) \Rightarrow \begin{cases} M=0 \\ N=1 \\ P=1 \\ Q=0 \end{cases}$$

Luego:

$$I=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{xdx}{x^2+2}=arctag\,x+\frac{1}{2}L\left(x^2+2\right)+C$$

NOTA: Para obtener el denominador de cada fracción simple en este caso se pone $(x-\alpha)^2+\beta^2$ para cada par de raíces complejas $\alpha\pm\beta i$ ó directamente el trinomio de 2º grado del que salen las raíces. Por ejemplo en nuestro caso:

$\alpha\pm\beta i=0\pm\sqrt{2}i$; $(x-\alpha)^2+\beta^2=(x-0)^2+(\sqrt{2})^2=x^2+2$

...

$$I=\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$$

El denominador tiene las raíces complejas $x=\pm\sqrt{2}i$ (triples). La descomposición será:

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Mx+N}{(x^2+2)^3} + \frac{Px+Q}{(x^2+2)^2} + \frac{Rx+S}{x^2+2}$$

operando, sale: M = 4 ; N = P = Q = 0 ; R = 1 , S = -1

$$\Rightarrow I = \int \frac{4x}{(x^2+2)^3} dx + \int \frac{x-1}{x^2+2} dx =$$

$$= -\frac{1}{(x^2+2)^2} + \int \frac{x-1}{x^2+2} dx - \int \frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= -\frac{1}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{2} L(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

(e) $I = \int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$

Dividiendo numerador y denominador:

$$I = \int \left(1 + \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\right) dx = \int dx \int \frac{5x+4}{x^2-2x-8} dx = x + I_1$$

Haciendo I_1 como en el ejemplo (1º) queda:

I = x + L (x + 2) + 4 L (x - 4) + C

METODO DE HERMITE

Se usa para resolver integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx tal que$

grad P (x) < grad Q (x) cuando las raíces de Q (x) son reales de alta multiplicidad ó complejas múltiples. Este método complica la obtención de coeficientes, pero una vez hallados éstos sólo aparecen integrales inmediatas.

Consiste en hacer la descomposición en la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{g(x)}{q(x)} + \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + ... + \frac{Mx+N}{(x-r)+s^2} \right) dx$$

Es decir:

_ Un sumando por cada raíz (sea simple ó múltiple)

_ Un término formado por:

q(x)=Q(x) dividiendo por los denominadores de los otros

sumandos=$\frac{Q(x)}{(x-a)(x-b)...\left[(x-r)^2+s^2\right]} = M.C.D.(Q(x), Q'(x))$

g(x)=$\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$....polinomio de coeficientes indeterminados de grado una unidad menor que el grado de q(x).

Los coeficientes A, B..., M, N.., α, β, γ... se hallan identificando coeficientes en la igualdad

: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{q(x)}\right) + \frac{A}{x-a} + ... + \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}$

Ejemplos

(a) I= $\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}dx$; Como el denominador tiene la raíz 1 múltiple de orden 4 aplicamos Hermite. x=1 es la única raíz $\Rightarrow$ pondremos un sumando $\frac{A}{x-1}$ *y otro* $\frac{g(x)}{q(x)}$, *siendo*:

$$q(x)=\frac{Q(x)}{x-1}=\frac{(x-1)^4}{(x-1)}=(x-1)^3$$

grado q(x)= 3 $\Rightarrow$ grado $g(x)=2 \Rightarrow g(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$

Con lo que:

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(x-1)^3}\right)+\frac{A}{x-1}$$

Haciendo la derivada :

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4}=\frac{-(\beta+3\alpha)-(2\gamma+2\beta)x-\gamma x^2}{(x-1)^4}+\frac{A}{x-1}$$

Es decir: $x^3+1=-(\beta+3\alpha)-(2\gamma+2\beta)x-\gamma x^2+A(x-1)^3$

que resuelto da: A=1/3
$\alpha=1/9;\ \beta=1;\ \gamma=-1$

7- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

Cuando escribamos R(x, $\sqrt{x}$), por ejemplo queremos decir "una función racional (donde solo salen sumas, restas, productos y cocientes) entre constantes x y $\sqrt{x}$, por ejemplo, $\frac{1+x}{2\sqrt{x}}, \frac{1+x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x^2+5\sqrt{x}}$, etc.

Lo mismo, R(sen x, cos x) es una función racional: de sen x y cos x.

Veamos algunos cambios de variable típicos, según la integral:

TIPO $\int R(x^{m/n}, x^{r/s}, ...)dx$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes: p=m.c.m. (n,s,...) y hacemos el cambio:

$x = t^p$, con el que $dx = pt^{p-1}dt$

Nos quedara una integral racional en t, $\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$ que se resuelve según el apartado 6-

Ejemplos

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$ Vemos que I= $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}}$

Como 4=m.c.m(2,4), hacemos el cambio :

$x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3dt$

$$x^{1/2} = (t^4)^{1/2} = t^2$$

$$x^{1/4} = (t^4)^{1/4} = t$$

$$I = \int \frac{4t^3dt}{t^2-t} = 4\int \frac{t^2dt}{t-1} = 4\int (t+1+\frac{1}{t-1})dt = 4\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right) = 2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C$$

pues $x = t^4 \Rightarrow t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow t^2 = \sqrt{x}$

$$\textbf{(b)} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\left(\sqrt{x} - arc.tag\sqrt{x}\right) + C conelcambio x = t^2$$

Ejercicios

$$\textbf{(72)} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}dx; \qquad \textbf{(73)} \int \frac{\sqrt{x} - x + 2}{\sqrt{x} + 1}dx$$

$$\textbf{(74)} \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}dx; \qquad \textbf{(75)} \int \frac{\sqrt[8]{x}dx}{\sqrt[16]{x} + \sqrt[4]{x}}$$

$$\textbf{TIPO} \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \ldots\right]dx$$

Es decir, cuando se repite un grupo lineal $\frac{ax+b}{cx+d}$ bajo distintos radicales.

Como antes se calcula p=m.c.m.(n,s,...) y se hace el cambio: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$, de donde se despeja **x** para hallar **dx**

Ejemplos

$$\textbf{(a)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(2x-1)^{1/2} - (2x-1)^{1/4}}$$

Hacemos el cambio:2x-1=$t^4 \Rightarrow 2dx = 4t^3dt \Rightarrow dx = 2t^3dt$ (como no hay denominador en (2x-1) no hace falta despejar la **x** para calcular **dx**)

Resulta:

$$I=\int\frac{2t^3dt}{t^2-t}=2\int\frac{tdt}{t-1}=t^2+2t+2\ln|t-1|=\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|+C$$

(b) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

$$\frac{x+1}{x-1}=t^3\Rightarrow x+1=t^3x-t^3\Rightarrow x(1-t^3)=-1-t^3\Rightarrow$$

$$x(1-t^3)=-1-t^3\rightarrow x=-\frac{1+t^3}{1-t^3}\rightarrow dx=-\frac{3t^2(1-t^3)-(-3t^2)(1+t^3)}{(1-t^3)^2}$$

$$=\frac{-6t^2\,dt}{(1-t^3)^2}$$

Luego, $\displaystyle I=-6\int t\frac{t^2\,dt}{(1-t^3)^2}=-6\int\frac{t^3}{(1-t^3)^2}dt$

que se hace como las racionales y da :

$$I=\frac{1}{3}\,L\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc.tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^3-1}+C$$

Se deshace el cambio poniendo $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ en lugar de t.

(c) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x-2}}=\int\frac{2dt}{t^2-4}=\frac{1}{2}L\left|\frac{t-2}{t+2}\right|=\frac{1}{2}L\left|\frac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-2}+2}\right|+C$

con el cambio: $x+2=t^2$

Ejercicios

(76) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$; (77) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

(78) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$; (79) $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}dx$

(80) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x}}dx$

TIPO $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Es decir, cuando aparece un trinomio de 2º grado bajo una raíz cuadrada. Haremos el cambio según el signo de a y el de c, en la forma:

Si $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t$

Si a<0 $\begin{cases} c>0: \sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c} \\ c<0: \sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha), \end{cases}$ x

donde α es una raíz del trinomio.

Después de elegir el cambio se eleva al cuadrado, se despeja x (los cambios están estudiados para que esto sea posible) y se halla dx; sustituyendo luego $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x, dx por sus expresiones en t se llega a una integral racional en t.

Veamos un ejemplo de cada caso:

EJEMPLOS

(a) I = $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 2}}$

Como a =1>0, hacemos: $\sqrt{x^2 + x + 2} = x + t$

$$x^2 + x + 2 = (x+t)^2$$

$$x^2 + x + 2 = x^2 + 2tx + t^2$$

$$x + 2 + 2tx + t^2$$

$$x = \frac{2-2}{1-2t}$$

$$dx = \frac{-2\left(t^2 - t + 2\right)}{(1-2t)^2}dt$$

$$I = \int \frac{\dfrac{-2\left(t^2 - t + 2\right)}{(1-2t)^2}}{\dfrac{t^2-2}{1-2t}\left(\dfrac{t^2-2}{1-2t} + t\right)}dt =$$

$$= 2\int \frac{-\left(t^2 - t + 2\right)}{\left(t^2-2\right)\left(-t^2 + t - 2\right)}dt = 2\int \frac{dt}{t^2-2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} L\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} L\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2} - x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2} - x + \sqrt{2}}\right| + C$$

Como vemos parece que va a quedar una integral muy complicada en t, pero se simplifica mucho.

(b) $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$

Como $a=-1\langle 0$ y $c=6\rangle 0$ hacemos:

$\sqrt{6+x-x^2} = tx+\sqrt{6}$

$6+x-x^2 = t^2x^2 + 2\sqrt{6}tx + 6$

$x-x^2 = t^2x^2 + 2\sqrt{6}tx$

$1-x = t^2\,x + 2\sqrt{6}\,t$

$x = \dfrac{1-2\sqrt{6}t}{1+t^2} \Rightarrow dx = \dfrac{2\left(\sqrt{6}t^2 - t - \sqrt{6}\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt$

luego,

$$I = 2\int \frac{\dfrac{\sqrt{6}t^2 - t - \sqrt{6}}{\left(1+t^2\right)^2}dt}{\dfrac{t\left(1-2\sqrt{6}t\right)}{1+t^2}+\sqrt{6}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctg\left(\frac{\sqrt{6+x-x^2}-\sqrt{6}}{x}\right)+C$$

(c) $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

Como a=-1<0 y c=-3<0 hacemos el tercer cambio. Para ello buscamos las raíces del trinomio: $-x^2+4x-3=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1 \;\; y \;\; x=3$

luego es $-x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3)$

Hemos cambiado el signo para calcular las raíces. Por eso ponemos (-).

Hacemos el cambio:

$\sqrt{-x^2+4x-3} = t(x-1)$

Es decir:

$$\sqrt{-(x-1)(x-3)} = t(x-1)$$
$$-(x-1)(x-3) = t^2(x-1)^2$$
$$-(x-3) = t^2(x-1)$$
$$x = \frac{3+t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

Luego,

$$I = \int \frac{\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt}{t\left(\frac{3+t^2}{1+t^2}-1\right)} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2arctgt = -2arctg\left(\frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{x-1}\right) + C$$

NOTA: En cualquier caso si el trinomio tiene raíces se puede hacer este cambio.

Ejercicios

(81) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$; (82) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

(83) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{-x^2+x+1}}$; (84) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$

(85) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{3x^2-x+1}}$; (86) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$

(87) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$; (88) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

8.- INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

TIPO $\int R(senx, \cos x)dx$

Se hace el cambio $tg\dfrac{x}{2} = t$, para el que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \ ; \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ; \ dx = \frac{2\,dt}{1}$$

quedando una integral racional en t.

EJEMPLO:

$$I = \int \frac{dx}{1 + senx + \cos x} \ ; \ \text{cambio } tg\frac{x}{2} = t \quad \text{queda:}$$

$$I = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1 + \dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t+1} = L(t+1) = L(tg\frac{x}{2} + 1) + e$$

CASOS PARTICULARES

El cambio anterior da integrales muy trabajosas muchas veces. En algunos casos se pueden hacer cambios que dan resultados más sencillos.

1. TIPO $\int R(sen^2 x, \cos^2 x, senx \cos x, ...)$

Es decir, cuando la función es par en sen x y cos x (todos los sumandos de grado par ó, dicho de otro modo, la función no cambia al sustituir sen x por (-sen x) y cos x por (-cos x)).

Se hace el cambio: tg x = t , con el que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ ; \ \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ ; \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

(Las raíces desaparecen por ser la función par y queda una racional en t de grado mitad que si aplicamos el otro cambio).

Ejemplo

$$I=\int\frac{dx}{sen^4 x\cos^2 x}$$ Con tg x = t, queda $I=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt,$

cuya integración es inmediata, mientras que $tg\,\frac{x}{2}=t\,daría\,I=\frac{1}{8}\int\frac{\left(1+t^2\right)^5}{t^4(1-t^2)^2}dt$ que es más **...**

2.- TIPO $\int\cos^m x sen^n x dx$

Si <u>m</u> impar : sen x = t $\Rightarrow\cos x\,dx=dt$
Si <u>n</u> impar : cos x = t $\Rightarrow+\text{sen}\,xdx=-dt$
Si <u>m,n</u> pases : Tipo anterior

3.- OTROS CASOS PARTICULARES

Ver pag. 15, capítulo 4.

Ejemplo

$$I=\int\cos^5 x\,sen^2 x\,dx$$

$$senx=t\Rightarrow\cos x\,dx=dt$$

$$I=\int\cos^4 x\,sen^2 x\cos x\,dx=\int(1-sen^2 x)^2\,sen^2 x\cos x\,dx=$$

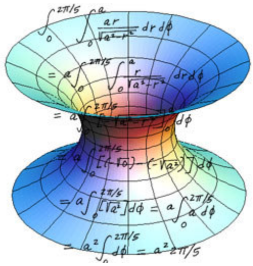
$$=\int(1-t^2)^2\,t^2\,dt\quad que\ \ es\ \ inmediata.$$

Ejercicios

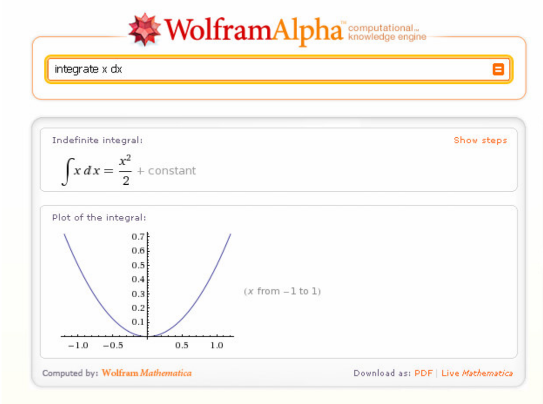
$(89)\int\frac{dx}{5+3senx}$; $(90)\int\frac{dx}{sen^3 x}$; $(91)\int sen^2 x\cos^4 x dx$; $(92)\int\frac{sen^4 x}{\cos x}dx$

$(93)\int\frac{dx}{2+3tgx}$; $(94)\int\frac{dx}{senx}$; $(95)\int sen^3 x\cos^4 x dx$

$(96)\int\frac{senx\cos x dx}{1-\cos x}$; $(97)\int\frac{2-senx}{...}dx$; $(98)\int\frac{dx}{sen^3 x\cos x}$



Integral on line



wolframalpha.com