Lugares Geométricos

Ejercicio nº 1.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a $Q(2, 4)$ sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

Ejercicio nº 2.-

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2, 3)$ y $B(4, 1)$.

Ejercicio nº 3.-

¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos $A(0, 1)$ y $B(0, -1)$ es 8?. Halla su ecuación.

Ejercicio nº 4.-

Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a la recta r_1: $x + y + 1 = 0$ sea igual que su distancia a la recta r_2: $2x + 2y + 4 = 0$.

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas r_1: $x + 3y - 1 = 0$ y r_2: $3x - y + 4 = 0$.

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia al punto $A(1, 0)$, es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifica la figura que obtienes.

Ejercicio nº 7.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia a $A(2, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Ejercicio nº 8.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x, y)$, tales que el triángulo ABP sea rectángulo en P, siendo $A(2, 1)$ y $B(-6, 1)$. Interpreta la figura que obtienes.

Ejercicio nº 9.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$ es 40. Identifica la figura resultante.

Ejercicio nº 10.-

Obtén el lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que:

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, r)} = 2, \text{ siendo } A(1,0) \text{ y } r: y = 4$$

¿Qué figura obtienes?

Circunferencia

Ejercicio nº 11.-

Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(1, 4)$ y tiene su centro en la recta $y = 2x$.

Ejercicio nº 12.-

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$.

Ejercicio nº 13.-

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(2, -3)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Ejercicio nº 14.-

Obtén la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 2)$.

Ejercicio nº 15.-

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0$$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Ejercicio nº 16.-

Halla la posición relativa de la recta r: $x + y = 2$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

Ejercicio nº 17.-

Estudia la posición relativa de la recta $y = \dfrac{8-4x}{3}$ **y la circunferencia** $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 20 = 0$.

Ejercicio nº 18.-

Halla la posción relativa de la recta $3x + 4y - 25 = 0$ **con respecto a la circunferencia** $x^2 + y^2 - 25 = 0$. **Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.**

Ejercicio nº 19.-

Estudia la posición relativa de la recta $r: 2x + y = 1$ **y la circunferencia** $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Ejercicio nº 20.-

Obtén el valor de k **para que la recta** $s: x + y + k = 0$ **sea tangente a la circunferencia** $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.

Cónicas

Ejercicio nº 21.-

Identifica estas cónicas, halla sus elementos y dibújalas:

a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$ **b)** $y^2 - 4x = 0$

Ejercicio nº 22.-

Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

a) $4x^2 + 25y^2 = 100$ **b)** $4y^2 - x^2 = 4$

Ejercicio nº 23.-

Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:

a) $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

Ejercicio nº 24.-

Dadas las siguientes cónicas, identifícalas, obtén sus elementos característicos y represéntalas gráficamente:

a) $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ b) $y^2-9x^2=9$

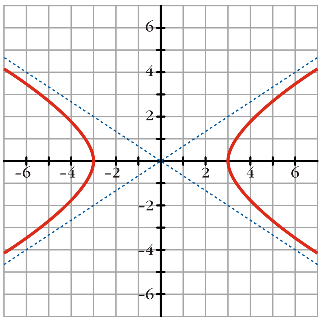
Ejercicio nº 25.-

Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1$ b) $25x^2+100y^2=2500$

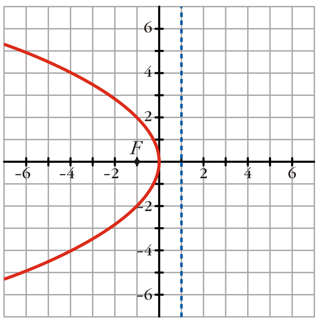
Ejercicio nº 26.-

Escribe la ecuación de la siguiente hipérbola y halla sus semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



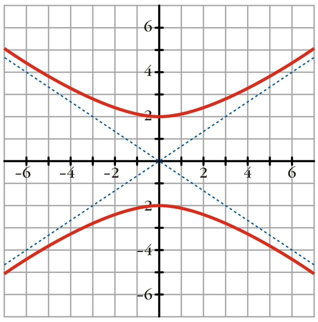
Ejercicio nº 27.-

Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



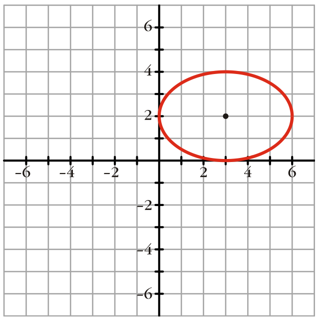
Ejercicio nº 28.

Pon la ecuación de la siguiente hipérbola, su semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



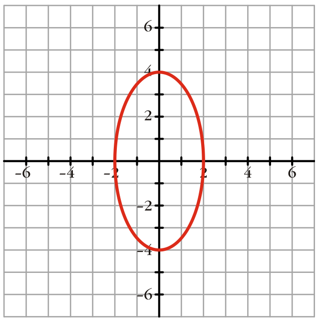
Ejercicio nº 29.-

Escribe la ecuación de la siguiente elipse y halla sus semiejes, sus focos y su excentricidad:



Ejercicio nº 30.-

Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



Soluciones ejercicios de Lugares Geométricos

Ejercicio nº 1.-

Halla el lugar goemétrico de los puntos, *P*, del plano tales que su distancia a *Q*(2, 4) sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

Solución:

Es una circunferencia de centro (2, 4) y radio 3. Hallamos su ecuación:
Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\ (P, Q) = 3$, es decir:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = 3$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$$(x-2)^2+(y-4)^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2-4x-8y+11=0$$

Ejercicio nº 2.-

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *A*(2, 3) y *B*(4, 1).

Solución:

Los puntos $P(x,y)$ de la mediatriz cumplen que:

$dist\ (P, A) = dist\ (P, B)$, es decir:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado en los dos miembros y operamos:

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9 = x^2-8x+16+y^2-2y+1$$
$$4x-4y-4=0 \qquad \rightarrow \qquad x-y-1=0$$

Es una recta perpendicular al segmento *AB*, que pasa por su punto medio.

Ejercicio nº 3.-

¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos *A*(0, 1) y *B*(0, –1) es 8?. Halla su ecuación.

Solución:

Es una elipse de focos *A* y *B* y constante $k = 8$. Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\ (P, A) + dist\ (P, B) = 4$, es decir:
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4$$

Elevamos al cuadrado y operamos para simplificar:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$x^2+(y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$x^2+y^2-2y+1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$8\sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4y+16$$

$$2\sqrt{x^2+(y+1)^2} = y+4$$

$$4\left(x^2+y^2+2y+1\right) = (y+4)^2$$

$$4x^2+4y^2+8y+4 = y^2+8y+16$$

$$4x^2+3y^2 = 12. \text{ Dividimos entre } 12:$$

$$\frac{4x^2}{12}+\frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1. \text{ Es una elipse.}$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

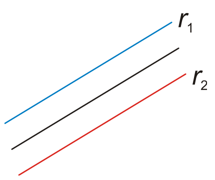
Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a la recta r_1: $x+y+1=0$ sea igual que su distancia a la recta r_2: $2x+2y+4=0$.

Solución:

Las dos rectas dadas,

r_1: $x+y+1=0$ y r_2: $x+y+2=0$,

son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\ (P, r_1) = dist\ (P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x+y+1| = |x+y+2| \quad \begin{cases} x+y+1 = x+y+2 \;\rightarrow\; 1=2 \;\rightarrow\; \text{Imposible} \\ x+y+1 = -x-y-2 \;\rightarrow\; 2x+2y+3=0 \end{cases}$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a r_1 y r_2.

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas
r_1: $x + 3y - 1 = 0$ y r_2: $3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices cumplen que:

$dist\,(P, r_1) = dist\,(P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x+3y-1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y+4|}{\sqrt{10}}$$

$$|x+3y-1| = |3x-y+4| \quad \begin{cases} x+3y-1 = 3x-y+4 \;\rightarrow\; 2x-4y+5=0 \\ x+3y-1 = -3x+y-4 \;\rightarrow\; 4x+2y+3=0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia al punto $A(1, 0)$, es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifica la figura que obtienes.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P,\ A) = 3\,dist(P,\ x=2)$, es decir:

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3|x-2|$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36$$

$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0$. Es una hipérbola

Ejercicio nº 7.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia a $A(2, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P,\ A) = 2\cdot dist(P,\ B)$, es decir:

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$(x+2)^2 + y^2 = 4$. Es una circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 2.

Ejercicio nº 8.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, *P*(*x*, *y*), tales que el triángulo *ABP* sea rectángulo en *P*, siendo *A*(2, 1) y *B*(–6, 1). Interpreta la figura que obtienes.

Solución:

Para que el triángulo sea rectángulo en *P*, se ha de cumplir que:

$$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-x, 1-y) \cdot (-6-x, 1-y) = 0$$
$$(2-x)(-6-x) + (1-y)^2 = 0$$
$$-12 - 2x + 6x + x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0; \text{ es decir:}$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Obtenemos una circunferencia de centro (–2, 1) (que es el punto medio del segmento *AB*) y de radio 4.

Ejercicio nº 9.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos *A*(–4, 0) y *B*(4, 0) es 40. Identifica la figura resultante.

Solucion:

Si *P*(*x*, *y*) es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[dist\,(P, A)]^2 + [dist\,(P, B)]^2 = 40; \text{ es decir:}$$

$$(x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Obtenemos una circunferencia de centro (0, 0) y radio 2.

Ejercicio nº 10.-

Obtén el lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que:

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, r)} = 2, \text{ siendo } A(1,0) \text{ y } r: y = 4$$

¿Qué figura obtienes?

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, r)} = 2, \text{ es decir: } dist(P, A) = 2 \cdot dist(P, r)$$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \cdot |y-4|$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(y^2 - 8y + 16)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4y^2 - 32y + 64$$

$x^2 - 3y^2 - 2x + 32y - 63 = 0$. Es una hipérbola

Circunferencia

Ejercicio nº 11.-

Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(1, 4)$ y tiene su centro en la recta $y = 2x$.

Solución:

Si tiene su centro en la recta $y = 2x$, las coordenadas de este son $C(x, 2x)$.

La distancia de A al centro ha de ser igual que la distancia de B al centro (esta distancia es el radio de la circunferencia):

$$dist\ (A, C) = dist\ (B, C)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-4)^2}$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16$$

$$12x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

El centro de la circunferencia es $C(1, 2)$.

El radio es: $r = dist(A, C) = \sqrt{4} = 2$

La ecuación será:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

Ejercicio nº 12.-

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$.

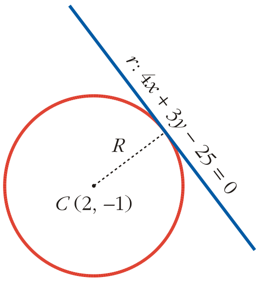
Solución:

Hallamos su centro:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{array}$$

$$2x + 9x - 21 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 11x = 22 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = -1$$

El centro es $C(2, -1)$.



El radio, R, es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = dist(C, r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

Ejercicio nº 13.-

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(2, -3)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Solución:

El radio, R, de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$$R = dist(C, r) = \frac{|6 + 12 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{529}{25} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{204}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$$

Ejercicio nº 14.-

Obtén la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos (1, 0) y (3, 2).

Solución:

El centro de la circunferencia pertenece a la mediatriz del segmento de extremos $A(1, 0)$ y $B(3, 2)$:

– Punto medio de A y B $\rightarrow$ $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2, 1)$

– Pendiente de la recta que pasa por A y B $\rightarrow$ $m = \frac{2-0}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

– Pendiente de la mediatriz (perpendicular) $\rightarrow$ $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{1} = -1$

– Ecuación de la mediatriz:

$y = 1 - 1(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = 1 - x + 2 \quad \rightarrow \quad y = 3 - x$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C(x, 3 - x)$.

La distancia del centro a los puntos A y B debe ser igual a 2:

$$dist(A, C) = \sqrt{(x-1)^2 + (3-x)^2} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- Centro (3, 0) y radio 2:

  $(x - 3)^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

- Centro (1, 2) y radio 2:

  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

Ejercicio nº 15.-

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$\mathbf{2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0}$$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Solución:

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

$$Centro = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = (2, 3)$$

$$Radio = \sqrt{4+9-4} = \sqrt{9} = 3$$

b) La circunferencia tiene radio 5 y centro (2, 3). Su ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

Ejercicio nº 16.-

Halla la posición relativa de la recta $r: x + y = 2$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (-1, -2)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{1+4-1} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$dist(C, r) = \frac{|-1-2-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}53 > 2 = \text{radio}$$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

Ejercicio nº 17.-

Estudia la posición relativa de la recta $y = \frac{8-4x}{3}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 20 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$Centro = C = \left(\frac{12}{2}, \frac{6}{2}\right) = (6, 3)$$

$$Radio = r = \sqrt{36+9-20} = \sqrt{25} = 5$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$s: y = \frac{8-4x}{3} \quad \rightarrow \quad 3y = 8 - 4x \quad \rightarrow \quad 4x + 3y - 8 = 0$$

$$dist(C, s) = \frac{|24+9-8|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5 = radio$$

- Como la distancia del centro a la recta es igual al radio, la recta es tangente a la circunferencia.

Ejercicio nº 18.-

Halla la posción relativa de la recta $3x + 4y - 25 = 0$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

Solución:

Como tenemos que hallar los posibles puntos de corte, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{25-3x}{4} \\ x^2 + \left(\dfrac{25-3x}{4}\right)^2 - 25 = 0 \end{array}$$

$$x^2 + \frac{625 - 150x + 9x^2}{16} - 25 = 0 \;\rightarrow\; 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 - 400 = 0 \;\rightarrow$$

Se cortan en el punto (3, 4). Por tanto, son tangentes.

Ejercicio nº 19.-

Estudia la posición relativa de la recta *r*: $2x + y = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

  $$\text{Centro} = C = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) = (2,\, 1)$$

  $$\text{Radio} = R = \sqrt{4 + 1 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

  $$dist(C, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}79 < 3 = \text{radio}$$

Por tanto, la circunferencia y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos.

Ejercicio nº 20.-

Obtén el valor de *k* para que la recta *s*: $x + y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$$

$$Centro = C = \left(\frac{-6}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (-3, -1)$$

$$Radio = r = \sqrt{9+1-6} = \sqrt{4} = 2$$

• Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$dist(C, s) = \frac{|-3-1+k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k-4|}{\sqrt{2}}$$

• Para que la recta sea tangente a la circunferencia, esta distancia ha de ser igual al radio:

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{2}} = 2 \quad \rightarrow \quad |k-4| = 2\sqrt{2} \quad \begin{cases} k-4 = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad k = 4+2\sqrt{2} \\ k-4 = -2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad k = 4-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones $k_1 = 4+2\sqrt{2}$; $k_2 = 4-2\sqrt{2}$

Cónicas

Ejercicio nº 21.-

Identifica estas cónicas, halla sus elementos y dibújalas:

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ **b)** $y^2 - 4x = 0$

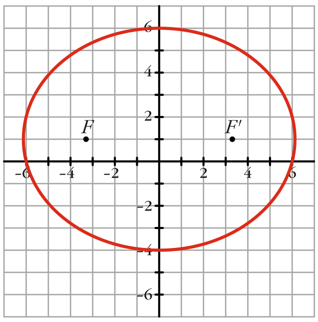
Solución:

a) Es una elipse de centro $P(0, 1)$.

Semieje mayor: 6; semieje menor: 5

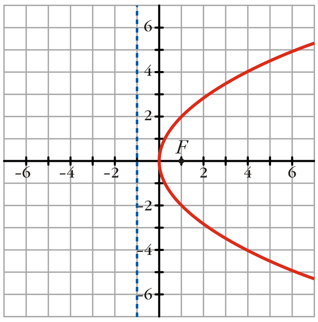
Focos: $F\left(\sqrt{11}, 11\right)$ y $F'\left(-\sqrt{11}, 1\right)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0{,}55$



b) $y^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 = 4x$

$$\text{Es una parábola: } \begin{cases} \text{Vértice: } (0,\ 0) \\ \text{Foco: } (1,\ 0) \\ \text{Directriz: } x = -1 \end{cases}$$



Ejercicio nº 22.-

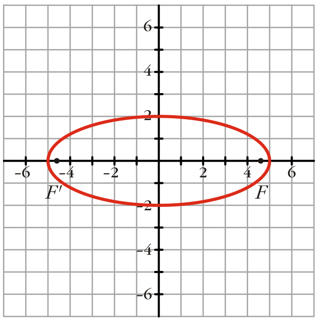
Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

a) $4x^2 + 25y^2 = 100$ **b)** $4y^2 - x^2 = 4$

Solución:

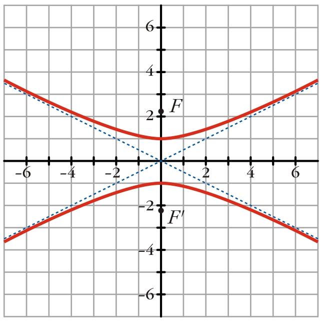
a) $4x^2 + 25y^2 = 100 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$\text{Es una elipse: } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 5 \\ \text{Semieje menor: } 2 \\ \text{Focos: } F\left(\sqrt{21},\ 0\right) \text{ y } F'\left(-\sqrt{21},\ 0\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}92 \end{cases}$$



b) $4y^2 - x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$

$$\text{Es una hipérbola: } \begin{cases} \text{Semieje: } 1 \\ \text{Focos: } F\left(0,\ \sqrt{5}\right) \text{ y } F'\left(0,\ -\sqrt{5}\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{5}}{1} \approx 2{,}24 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{1}{2}x\ ;\quad y = \dfrac{-1}{2}x \end{cases}$$



Ejercicio nº 23.-

Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:

a) $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

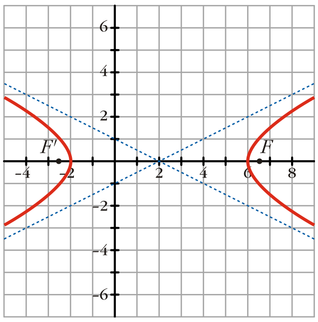
Solución:

a) Es una hipérbola de centro $P(2, 0)$.

Los focos son: $F\left(2+2\sqrt{5},\ 0\right)$ y $F'\left(2-2\sqrt{5},\ 0\right)$

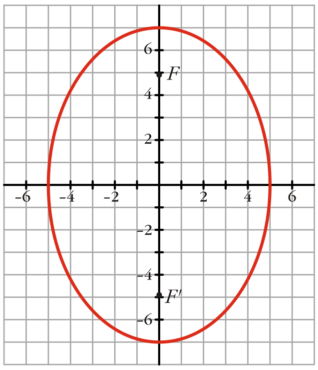
La excentricidad es: $e = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Las asíntotas son: $y = \dfrac{1}{2}(x-2)$; $y = \dfrac{-1}{2}(x-2)$



b)

$$\text{Es una elipse:} \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 7 \\ \text{Semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F\left(0,\ \sqrt{24}\right) \text{ y } F'\left(0,\ -\sqrt{24}\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{24}}{7} \approx 0{,}7 \end{cases}$$



Ejercicio nº 24.-

Dadas las siguientes cónicas, identifícalas, obtén sus elementos característicos y represéntalas gráficamente:

a) $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$ **b)** $y^2 - 9x^2 = 9$

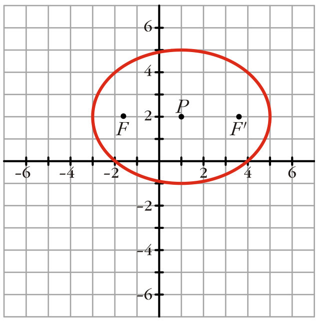
Solución:

a) Es una elipse de centro $P(1, 2)$.

Semieje mayor: 4; semieje menor: 3

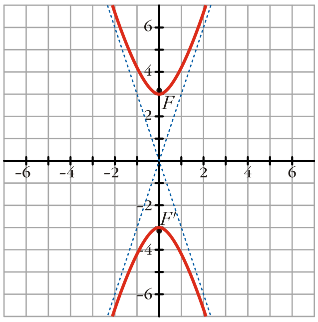
Focos: $F\left(1+\sqrt{7},\ 2\right)$ y $F'\left(1-\sqrt{7},\ 2\right)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66$



b) $y^2 - 9x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

$$\text{Es una hipérbola} \begin{cases} \text{Semieje: } 3 \\ \text{Focos: } F\left(0,\ \sqrt{10}\right) \text{ y } F'\left(0,\ -\sqrt{10}\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}05 \\ \text{Asíntotas: } y = 3x\ ;\quad y = -3x \end{cases}$$



Ejercicio nº 25.-

Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ **b)** $25x^2 + 100y^2 = 2500$

Solución:

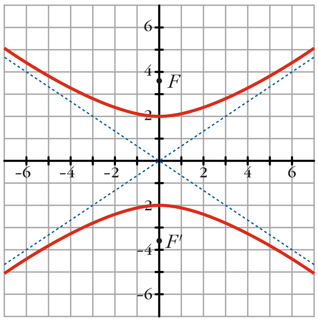
a) Es una hipérbola.

Semieje: 2

Focos: $F\left(0,\ \sqrt{13}\right)$ y $F'\left(0,\ -\sqrt{13}\right)$

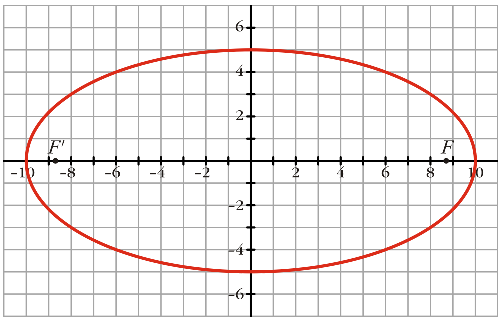
Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}8$

Asíntotas: $y = \dfrac{2}{3}x\ ;\quad y = \dfrac{-2}{3}x$



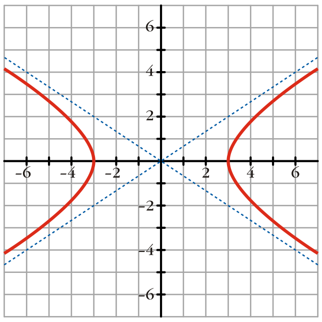
b) $25x^2 + 100y^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$$\text{Es una elipse: }\begin{cases}\text{Semieje mayor: } 10; \ \text{ semieje menor: } 5\\[2ex] \text{Focos: } F\left(5\sqrt{3},\, 0\right) \text{ y } F'\left(-5\sqrt{3},\, 0\right)\\[2ex] \text{Excentricidad: } \dfrac{5\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}87\end{cases}$$



Ejercicio nº 26.-

Escribe la ecuación de la siguiente hipérbola y halla sus semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



Solución:

Ecuación $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Semieje: 3

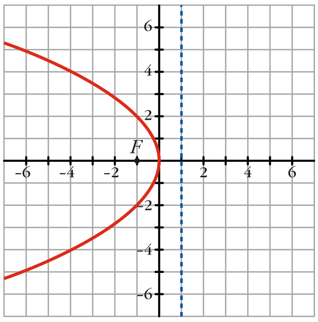
Focos: $F\left(\sqrt{13},\, 0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{13},\, 0\right)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{13}}{3} \approx 1{,}2$

Asíntotas $y = \dfrac{2}{3}x\,; \quad y = \dfrac{-2}{3}x$

Ejercicio nº 27.-

Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



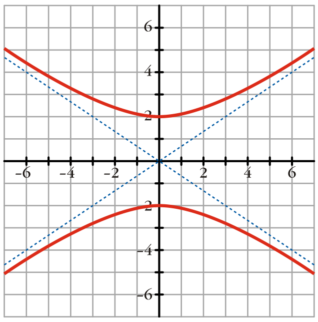
Solución:

Directriz: $x = 1$. Foco $(-1, 0)$.

Ecuación: $y^2 = -4x$

<u>Ejercicio nº 28.</u>

Pon la ecuación de la siguiente hipérbola, su semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



Solución:

Ecuación $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

Semieje: 2

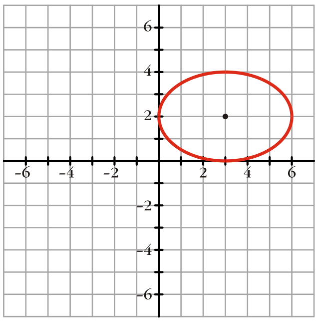
Focos: $F\left(0, \sqrt{13}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{13}\right)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}8$

Asíntotas $y = \frac{2}{3}x$; $y = \frac{-2}{3}x$

<u>Ejercicio nº 29.-</u>

Escribe la ecuación de la siguiente elipse y halla sus semiejes, sus focos y su excentricidad:



Solución:

Ecuación: $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

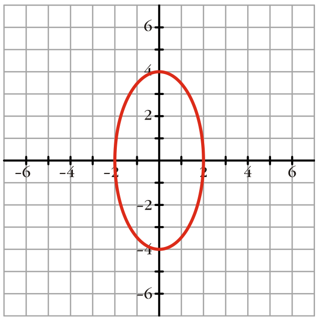
Semieje mayor: 3; semieje menor: 2

Focos: $F\left(3+\sqrt{5},\, 2\right)$ y $F'\left(3-\sqrt{5},\, 2\right)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}75$

<u>Ejercicio nº 30.-</u>

Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



Solución:

Semieje mayor: 4; semieje menor: 2

Focos: $F\left(0,\, \sqrt{12}\right)$ y $F'\left(0,\, -\sqrt{12}\right)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{12}}{4}\approx 0{,}87$

Ecuación: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$