FRACTALES

Jesús Manuel García Muñoz

La Geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.

Michael F. Barnsley (Fractals Everywhere)

¿Cómo surgen los fractales?

- Hacia el año 1958, Benoit Mandelbrot comienza una investigación en los laboratorios de IBM acerca del análisis del ruido y las perturbaciones eléctricas.
- Encuentra un patrón de comportamiento y comienza a descifrar una estructura escondida que se repite a diversas escalas.
- Conforme avanza sus investigaciones se plantea una pregunta para ejemplificar los descubierto:

¿Cuánto mide la costa de Inglaterra?

- Esta pregunta puede parecer un tanto absurda pero planteemos tres situaciones para realizar la medición:

  - Observación de la costa desde un satélite.

  - Observación de la costa desde un helicóptero.

  - Observación de la costa desde la superficie terrestre.
- Supongamos que ampliamos el lugar del observador hasta el infinito.
- ¿Cuál sería el resultado de la medición en cada caso?

Concepto de fractal

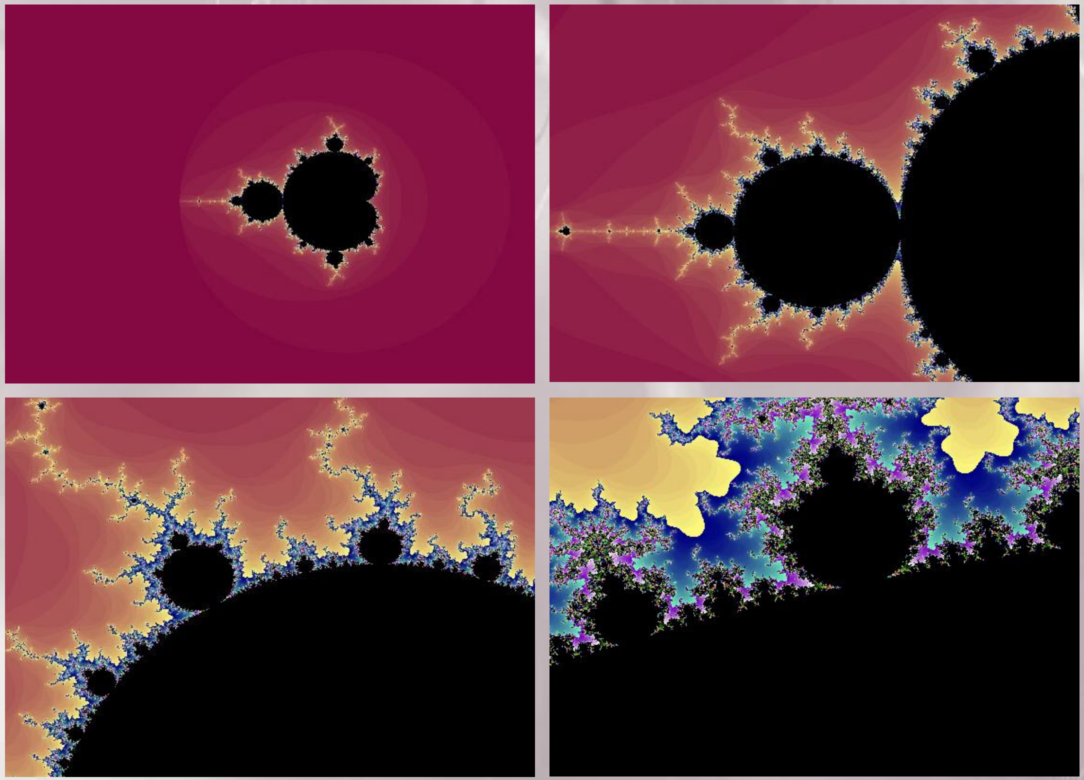
- No es fácil definir “fractal” objetivamente, puesto que se trata de una realidad abstracta. Sin embargo, nos acercaremos al concepto con la siguiente definición:

  “Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura se repite en diferentes escalas. Esta estructura puede ser generada por un proceso recursivo o iterativo capaz de producir estructuras similares independientemente de la escala de visualización.”

- Los fractales se caracterizan del siguiente modo:
  - Un fractal es un objeto matemático que conforma la **teoría del caos**.
  - La geometría fractal es también conocida como la **geometría de la naturaleza**.



- Los fractales son objetos cuya **dimensión** es **fraccionaria**.
- Un objeto fractal es aquel cuya dimensión de Hausdorff supera a su dimensión topológica.
- La **dimensión fractal** es otra de las características de los fractales, la cual deben poseer todos ellos.
- Cada porción del objeto posee las mismas características que el objeto completo, es decir, posee una **autosimilitud**.

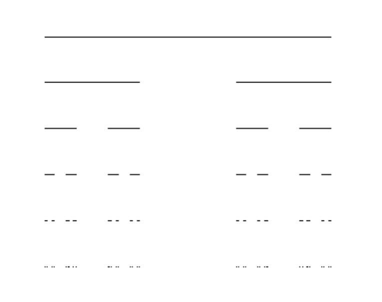


Conjunto de Mandelbrot

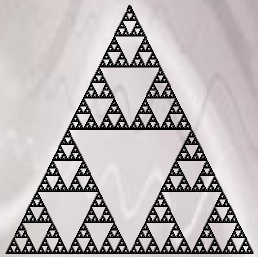
Tipos de fractales

Podemos clasificar los fractales por las siguientes características:

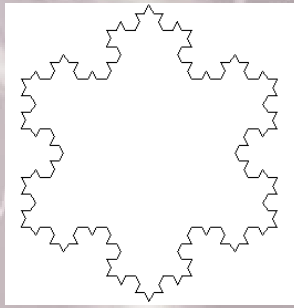
- Los fractales **lineales** son aquellos que se construyen con un cambio en la variación de sus escalas.



Conjunto de Cantor

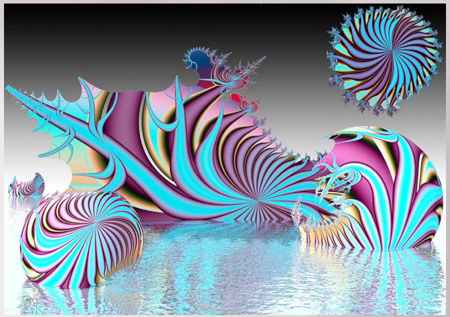


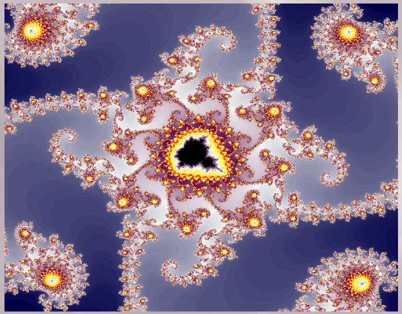
Triángulo de Sierpinski

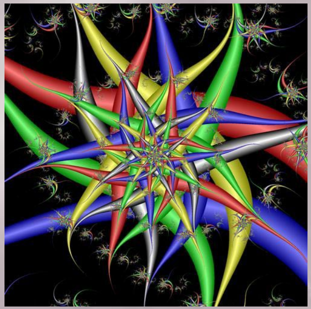


Curva de Koch

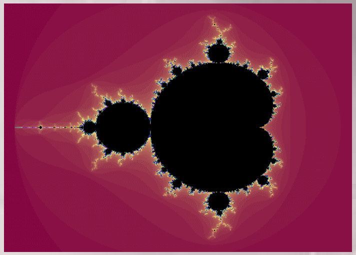
En cambio, los fractales **no lineales** se generan creando distorsiones no lineales o complejas.







- Los fractales pueden generarse a partir de elementos de la matemática tradicional (fractales lineales) o a partir de **números complejos**. De hecho, el conjunto de Mandelbrot está generado a partir de la iteración de la siguiente expresión compleja:



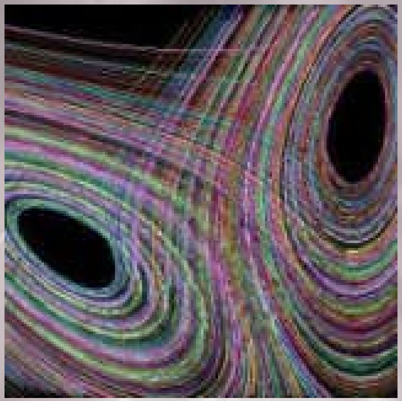
$$Z^2 + W$$

Dónde Z y W son números complejos.

- Un **fractal** puede ser **iterativo**. Las iteraciones consisten en repetir y volver sobre si mismo una cierta cantidad de veces. En el caso de los fractales iteramos fórmulas matemáticas. Esta iteración se realiza mediante el uso de algoritmos, lo que explica la reciente aparición del estudio de los fractales como campo de las matemáticas, puesto que la computación es también de nacimiento reciente, con la cual se lleva a cabo la resolución de algoritmos más rápidamente.

  Teniendo en cuenta que un fractal se obtendría iterando hasta el infinito, nos damos cuenta de que una iteración hasta el infinito es imposible de realizar en la práctica, así que el concepto de fractal perfecto lo veremos solo de modo teórico.

- Todos los fractales no tienen por qué ser **autosimilares**. A estos fractales que no lo son los denominamos fractales plasmáticos. El siguiente es un ejemplo de un fractal plasmático.



La dimensión fractal

- Los fractales deben poseer una dimensión que debe ser no entera y cuya dimensión fractal debe superar a su dimensión topológica. Las dimensiones topológicas son las siguientes:
  - Dimensión -1 (conjunto vacío)
  - Dimensión 0 (un punto)
  - Dimensión 1 (una línea recta)
  - Dimensión 2 (un plano)
  - Dimensión 3 (el espacio)
- Como los fractales están compuestos por elementos cada vez más pequeños de sí, el concepto de longitud pasa a ser algo complejo por lo que mediremos los fractales por su dimensión.
- El cálculo de la dimensión de un objeto nos permitirá conocer si ese objeto es o no un fractal.
- La expresión matemática para calcular la dimensión de un fractal es $S = L^D$ de la cual S es la cantidad de segmentos o su longitud, L es la escala de dimensión y D es la dimensión, la cual debemos despejar.

- Despejando obtenemos la siguiente expresión:

$$D = \frac{\log(S)}{\log(L)}$$

- A continuación vamos a comprobar si una línea recta es o no un fractal. Tomamos por ejemplo un segmento de 1 metro de longitud, el cual mediremos con una regla que también mide 1 metro. Por lo tanto tenemos que S=1 y L=1. Operamos pues, con la expresión anterior:

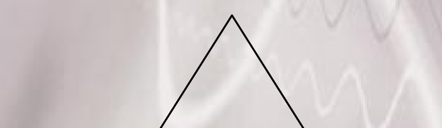
$$D = \frac{\log(S)}{\log(L)} = \frac{\log(1)}{\log(1)} = 1$$

  Obtenemos por lo tanto que la dimensión de una línea recta vale 1.

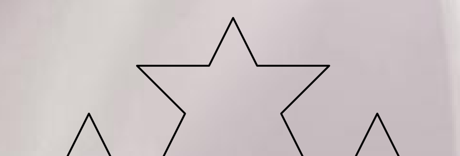
- Por la definición de fractal, decíamos que un fractal debe poseer una dimensión fractal (la cual acabamos de calcular) superior a su dimensión topológica que en el caso de la recta vale 1. Por lo tanto deducimos que una recta no es un fractal.
- Análogamente probamos que un cuadrado (de dimensión 2) y un cubo (de dimensión 3) tampoco son fractales porque sus dimensiones fractales no superan a sus dimensiones topológicas.

- Veamos ahora un ejemplo del cálculo de la dimensión de un objeto que sí que es un fractal.
- Un fractal se genera en tres etapas. La primera es definir una figura generadora. La segunda etapa es aplicar un determinado algoritmo sobre esa figura y la tercera etapa consiste en iterar ese algoritmo sobre la figura generada. Veamos un ejemplo gráfico con la conocida curva de Koch.
  - 1º ETAPA (definición de la figura generadora)

  - 2º ETAPA (aplicación de un determinado algoritmo)



  - 3º ETAPA (iteración de dicho algoritmo)



- Para calcular la dimensión de este objeto tomamos L=3 y S=4. Aplicando la fórmula de la dimensión obtenemos:

$$D = \frac{\log(S)}{\log(L)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1{,}261859507$$

- Calcular la dimensión de un fractal de tipo no lineal no nos es tan sencillo.

Fractales y la Teoría del Caos

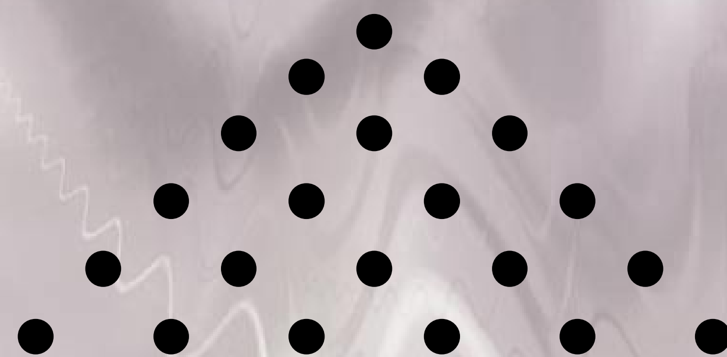
- La teoría del caos tiene un fuerte trasfondo filosófico.
- Los fractales no lineales implican caos, pero el caos no implica a fractales, es decir, la teoría del caos no se basa únicamente en la geometría fractal.
- Los sistemas caóticos son aquellos que se encuentran afectados directamente por sus condiciones iniciales, transformándolos en el transcurso del tiempo en sistemas imposibles de predecir.
- Podemos poner como ejemplo el llamado *“efecto mariposa”*, el cual estipula que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de un sistema dinámico pueden producir grandes variaciones en el comportamiento del sistema a largo plazo.
- Cualquier sistema regido por las leyes de la naturaleza en un momento dado se puede transformar en un sistema totalmente caótico que esté regido más por el azar que por las leyes de la naturaleza.

- Postulados importantes sobre la teoría del caos:
  - Para la teoría del caos no existen sistemas ni 100% ordenados ni 100% caóticos. Esta teoría acepta tanto al orden como al caos lo relaciona en una dualidad de la siguiente manera:

    “En todo sistema ordenado, el caos siempre está presente o implícito”

    “En todo sistema caótico, el orden siempre está presente o implícito”
  - Imaginemos un sistema ordenado. En todo momento este sistema permanece ordenador pero lleva implícito consigo el mismo caos, que va trabajando poco a poco muy silenciosamente y en un determinado punto se apoderará por completo del mismo produciendo consecuencias insospechadas.
  - Por más que un sistema haya derivado en caos o se haya vuelto ordenado y estable, potencialmente vuelve a pasar al estado inverso. Ahora, aquel que era estable y derivó en caos vuelve a llevar implícito consigo mismo el volver a transformarse nuevamente en orden. Y aquel que era caótico y desordenado y derivó en orden, ahora lleva el caos implícito en su esencia. Esto lleva a conformar un circuito que no es ni más ni menos que cómo se genera y se construye la naturaleza.
- Veamos algunos ejemplo que se dan en la naturaleza y que se basan en la teoría del caos.

1. Supongamos que clavamos diferentes clavos en una pared tal y como apreciamos en el siguiente dibujo:



Ahora posicionaremos en el primer clavo una bolita y la dejaremos caer, de modo que esta bolita irá bajando hasta la base del triángulo formado y saldrá entre dos clavos. Ahora repitamos el mismo experimento. Podemos probar que el recorrido que realiza la bola y la posición por la que sale, muy probablemente sea distinta a los del anterior experimento.

2. Científicos realizaron el siguiente experimento:

Se convocó a una persona que no había jugado ni sabía en qué consistía el famoso juego “Tetris”. Se le inyectó glucosa radioactiva (de la cual se alimenta el cerebro) y comenzó a jugar sin dársele explicación de cómo jugar a dicho juego.

Con un monitor conectado al cerebro pudieron observar que la glucosa radioactiva iluminaba las regiones del cerebro que la persona utilizaba para entender cómo se jugaba, las cuales en primera instancia se manifestaban en gran cantidad.

Más tarde se volvió a repetir el procedimiento, enseñándole a jugar al mismo tiempo. Mientras la persona más aprendía menos regiones del cerebro se le iluminaban, pues este iba asimilando y almacenando la información y ya no tenía que buscar datos por la corteza del cerebro.

Cuando había aprendido a jugar por completo solo una pequeña región del cerebro se iluminaba.

3. Al arrojar una piedra en un estanque de agua se genera una perturbación produciéndose pequeñas ondas, las cuales, dependiendo de la fuerza con la que se lanzó la piedra o de las condiciones del agua en ese momento, pueden durar más o menos tiempo, llegando a desaparecer.

   John Russell observó un extraño fenómeno. En estas situaciones en que se dan una serie de condiciones iniciales muy especiales, hay olas en el océano que se unen formando una nueva con características propias. A esta ola se la denomina “solitón” y viene a ser, por definición, una onda solitaria que se propaga sin deformarse en un medio no lineal.

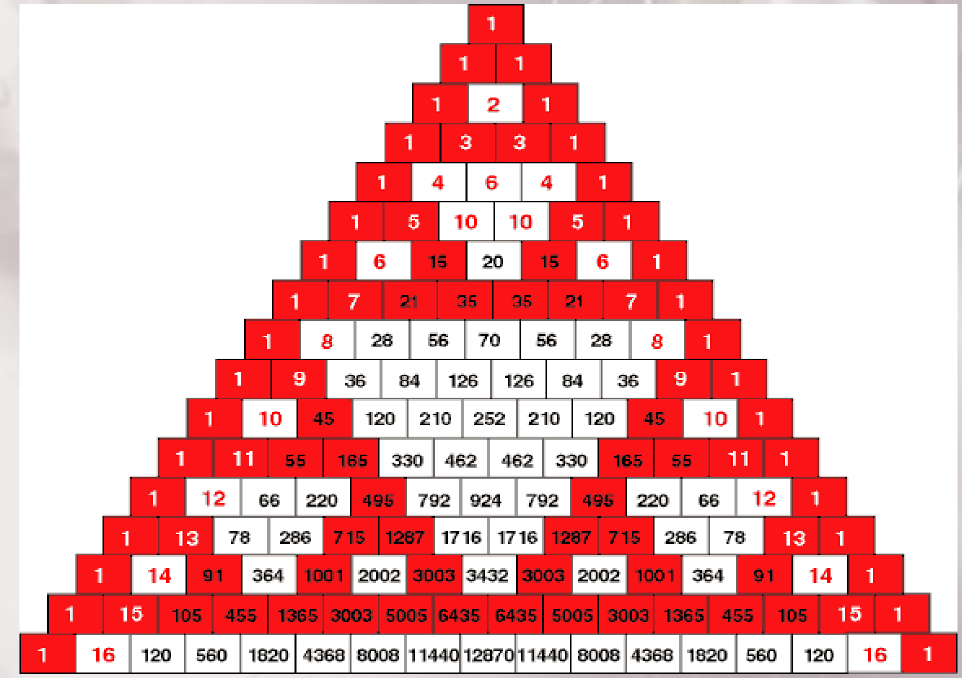
   Esta onda no se deforma aunque sea atravesada por un barco, al instante recobra la estructura original. Aunque se produzcan vientos o tormenta esta sigue adelante.

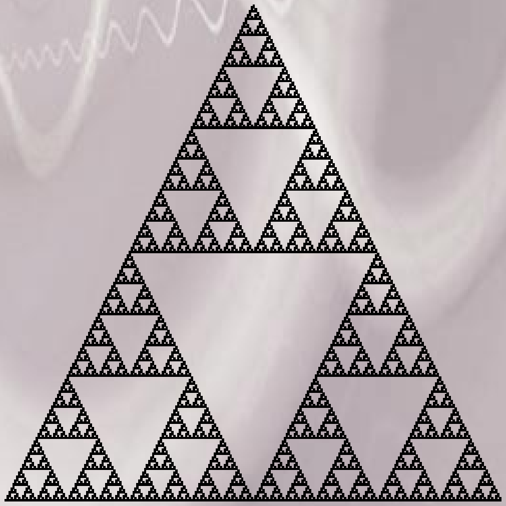
   Se ha investigado mucho sobre este fenómeno, el cual se dice que puede englobar todos los misterios de la teoría del caos.

Fractales y Matemática

A continuación vamos a ver algunos casos en los que las matemáticas están íntimamente ligadas a los fractales.

Triángulo de Sierpinski y triángulo de pascal





El número PI y el conjunto de Mandelbrot

Matemáticos investigando en teoría de números decidieron estudiar el conjunto de Mandelbrot. Dividieron el estudio en dos partes, primero el cuello de esta imagen y luego su parte posterior. Estudiando iteraciones en el cuello y en la parte posterior del conjunto se llegó a estos resultados:

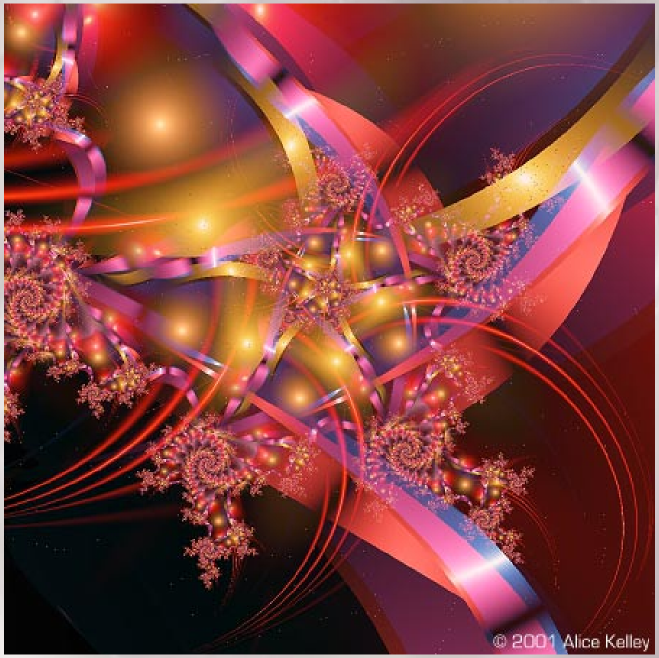
X	Número de Iteraciones
1.0	3
0.1	33
1.01	315
0.001	3143
0.0001	31417
0.00001	314160
0.000001	3141593
0.0000001	31415928

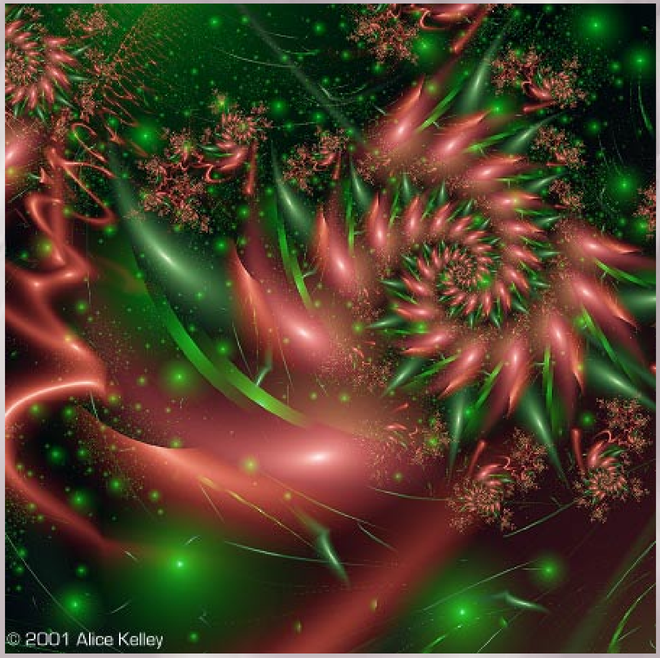
Iteraciones de los X pertenecientes al cuello del conjunto

X	Número de Iteraciones
1.0	2
0.1	8
1.01	30
0.001	97
0.0001	312
0.00001	991
0.000001	3140
0.0000001	9933
0.00000001	31414
0.000000001	99344
0.0000000001	314157

Iteraciones de los X pertenecientes a la parte posterior del conjunto

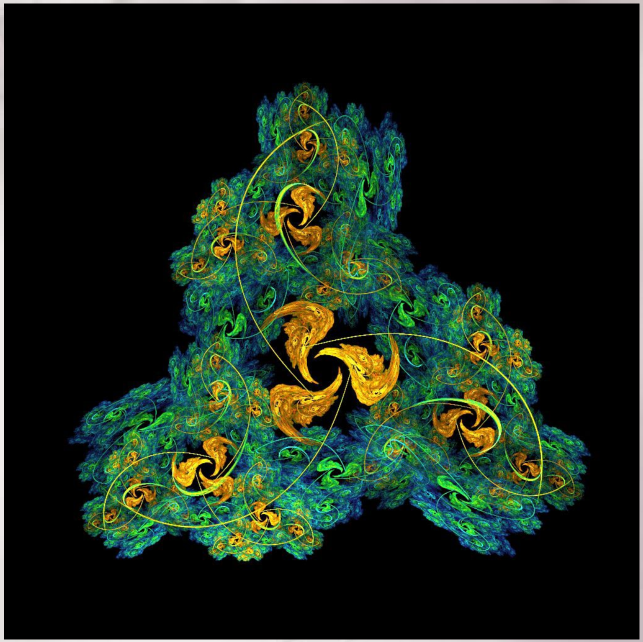
Algunas imágenes fractales

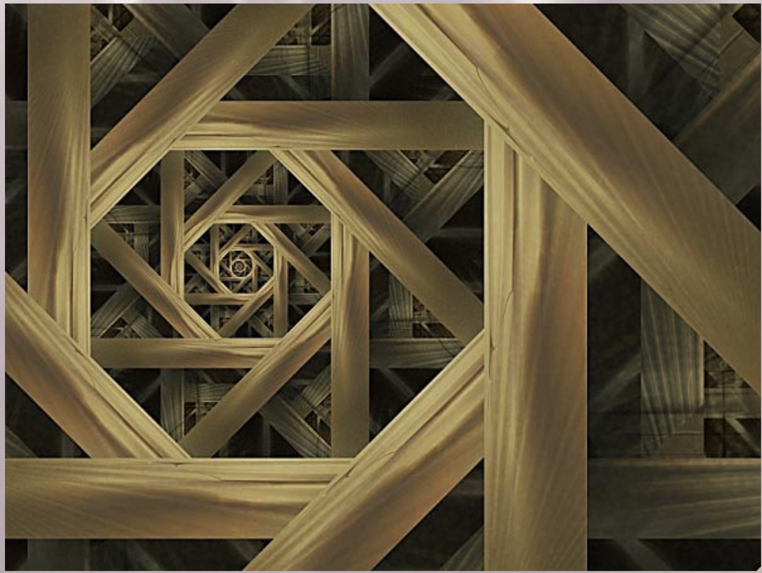


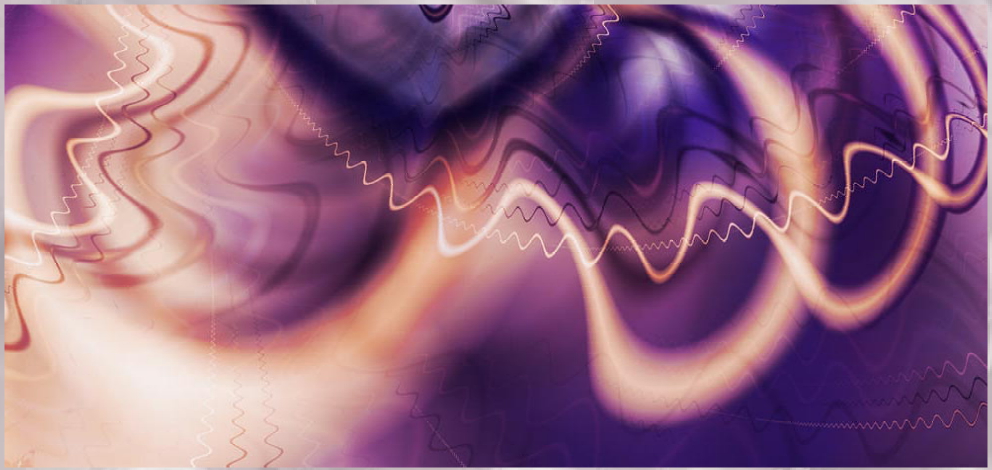



© 2001 Alice Kelley


Don Ten 05






Software fractal

- Existen bastantes programas capaces de trabajar con fractales. Con la ayuda de estos podemos, desde crear nuestros propios fractales, hasta crear una bella melodía musical.
- Podemos clasificar este software en dos grandes categorías que a su vez se subdividen para diversas temáticas.
  - Estudio de fractales desde un punto de vista teórico.
    - Nivel matemático
    - Nivel de programación
    - Nivel de desarrollo de algoritmos
    - Creación de fractales IFS (fractales simples)
    - Evolución de atractores (sistemas que tras un número de iteraciones tienden a estabilizarse
  - Estudio de fractales desde un punto de vista artístico.
    - Creación de imágenes
    - Galerías virtuales
    - Música fractal
    - Películas fractales
- Pasemos a comentar los programas más conocidos en la materia.

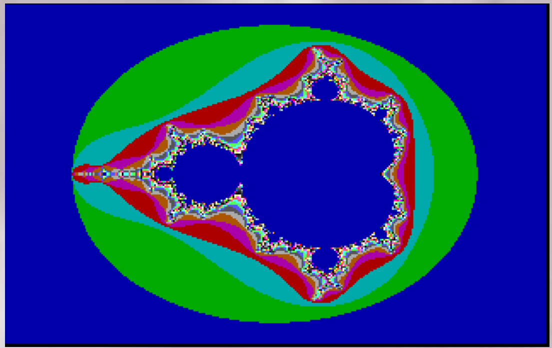
Fractint

Características

- Este es un software, con licencia freeware, pionero en la materia.
- Es muy potente en el campo matemático de los fractales.
- Gráficamente no está excesivamente desarrollado.
- Plataforma: Windows, DOS y Unix.
- La versión más desarrollada es la versión para plataforma DOS (actualmente podemos descargar la versión 20.0).
- Incluye la funcionalidad de generar imágenes.
- La versión de Unix también es bastante potente.

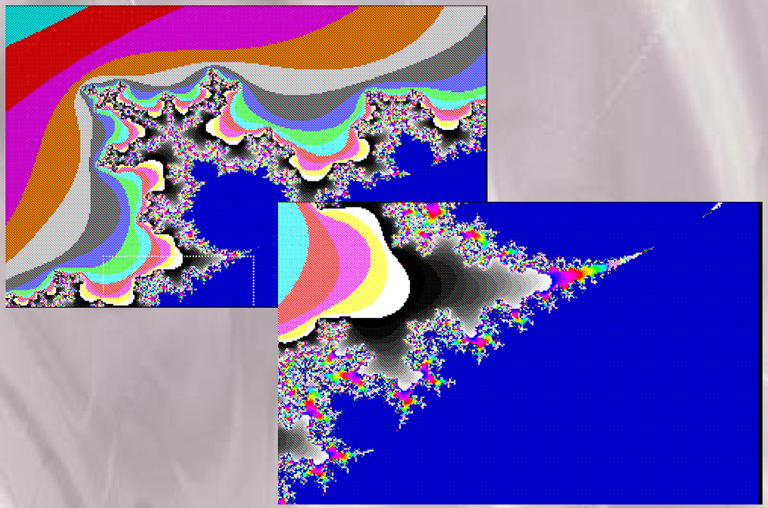
Funcionamiento (versión DOS)

Tras haber descargado y ejecutado el programa, además de seleccionar el modo de video que soporta nuestra tarjeta, podemos ver cómo el programa nos muestre el conjunto de Mandelbrot en pantalla.



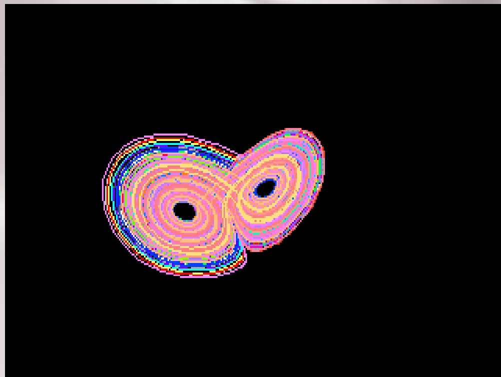
Mediante las teclas de avance y retroceso de página podemos seleccionar una zona del fractal para agrandarla pulsando la tecla *"intro"*.

Puesto que el método para agrandar la imagen es la iteración, y no podemos hacer un programa que itere infinitas veces, habrá un momento en el que la imagen que veamos sea de un solo color. Lo siguiente es una cita, textual, de un fragmento de un tutorial bastante amplio de fractint.

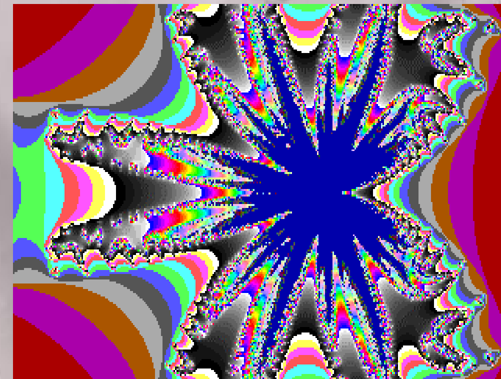


"La mayoría de los tipos de fractal incluidos admiten ampliar cualquier parte de la imagen. En principio, el límite de zoom por procedimientos normales es de 10^{15}*. Eso significa, más o menos, ampliar una mesa de ping-pong más allá del tamaño del sistema solar. Podría ser suficiente, pero lo cierto es que, aplicando una técnica llamada precisión arbitraria, fractint puede llegar a niveles de ampliación del orden de* 10^{1600} *. No existen ejemplos de esta relación de tamaño dentro del universo conocido."*

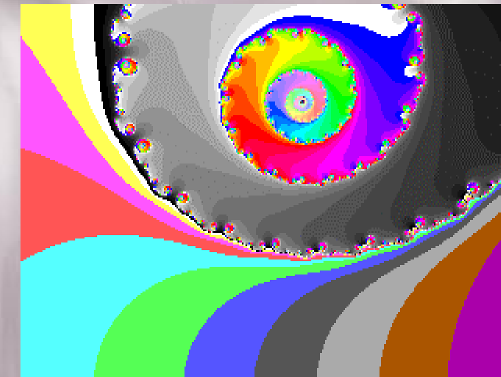
- Fractint incluye otras 100 fórmulas para interactuar con ellas. Podemos acceder a estas presionando la tecla *'t'* o desde el menú principal, seleccionando la opción *"Select Fractal Tipe"*.
- Algo interesante de este programa es que se puede interactuar con fractales de tipo IFS, como por ejemplo el triángulo de Sierpinski.
- Podremos guardar las imágenes que generamos en formato gif. Este gif no es un gif estándar, pues podemos reabrir el fichero cargando los datos del fractal. Para guardar una imagen presionaremos la tecla *'s'* o desde el menú principal, seleccionamos la opción *"Save image to file"*. La imagen se guardará en el directorio del programa.
- Otras opciones que fractint nos permite llevar a cabo pueden ser el cambio de paleta de colores de los fractales, dar parámetros a un fractal para visionarlo en 3D.
- Seguidamente veremos algunos fractales generados con las fórmulas que fractint incluye.



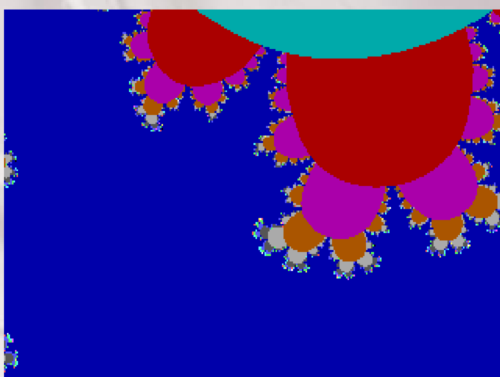
Lorenz3d



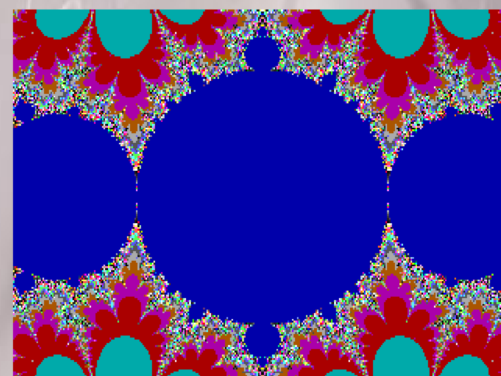
Manowarj



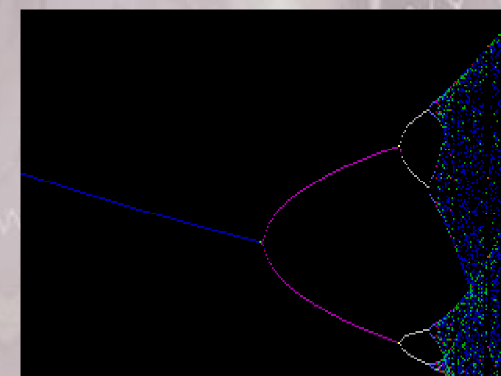
Phoenixcplx



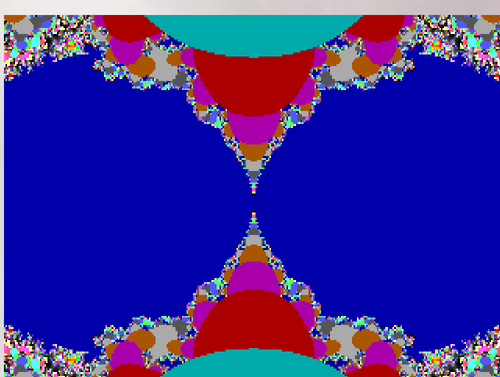
Sqr(fn)



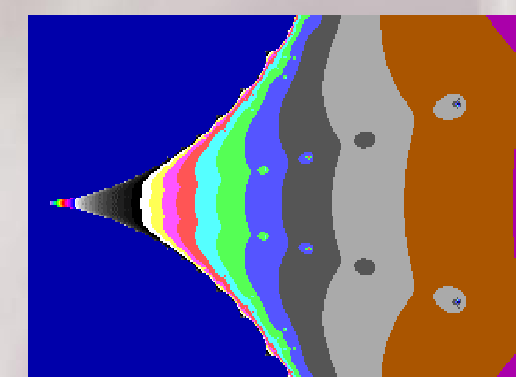
Mandelfn



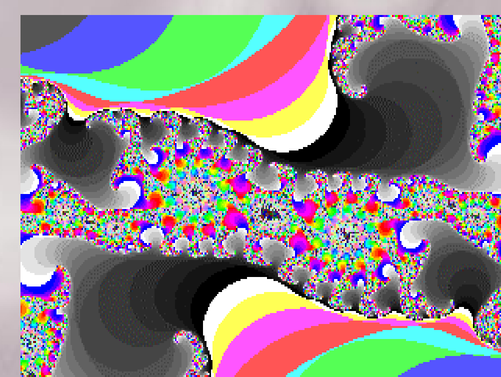
Bifurcation



Hypercomplex



Fn+Fn



Lambda

Ultra Fractal

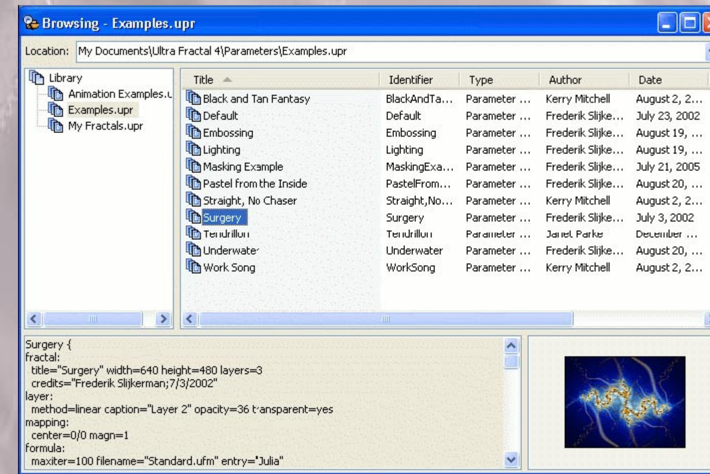
Características

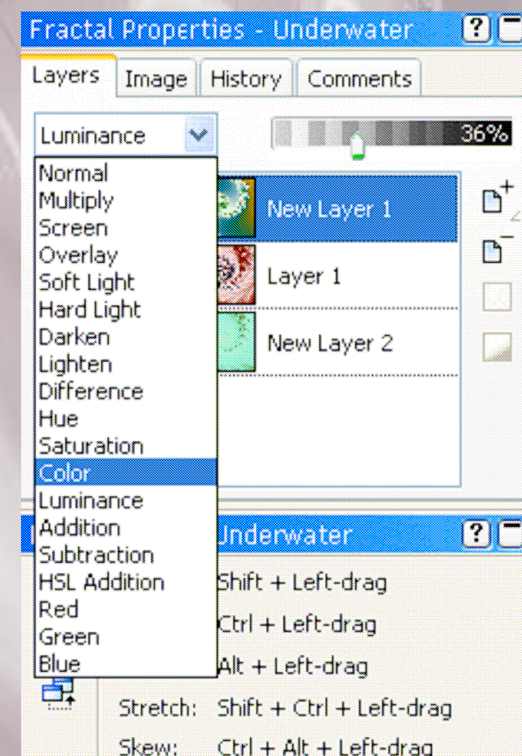
- Este es otro de los programas más importantes que podemos encontrar para el proposito de trabajar con fractales.
- Este software es propietario aunque desde la web podemos descargar una versión que caduca en 30 días pero con algunas limitaciones como la imposición de marcas de agua en las imágenes o videos que permite generar.
- Se distribuye unicamente para plataformas Windows y exiasten dos versiones: edición animada y edición estándar.
- La diferencia entre ambas es que la estandar no permite crear animaciones ni cálculos en red.
- Es un programa de uso bastante sencillo para comenzar a investigar con fractales.
- Es capaz de generar imágenes bastante buenas e incluso increibles animaciones.

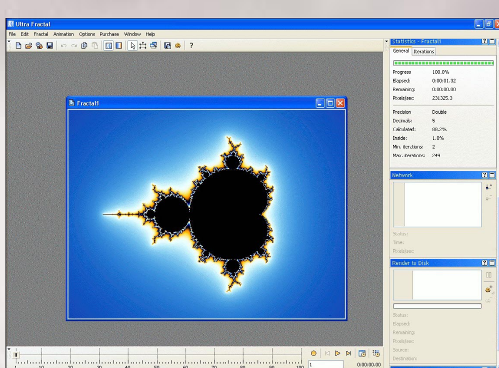
Funcionamiento

- Al iniciar el programa nos muestra el conjunto de Mandelbrot (al igual que ocurría con fractint).

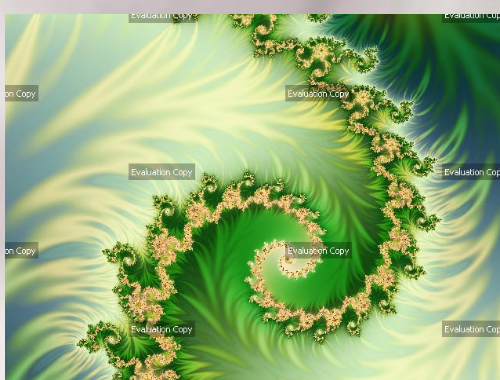
- Podemos hacer zoom seleccionando una zona de la imagen con el ratón e iterar sobre ella haciendo doble clic, tanto ampliando como disminuyendo.
- Podemos encontrar otros tipos de fractales guardados en el directorio *“Parameters”* del directorio de trabajo del programa que generalmente se crea en el interior de *“Mis documentos”*.
- Ultra fractal también es una útil herramienta para diseñadores gráficos puesto que permite almacenar imágenes de fractales que previamente hayamos creado, dándole diversos efectos como transparencias, color, saturación…



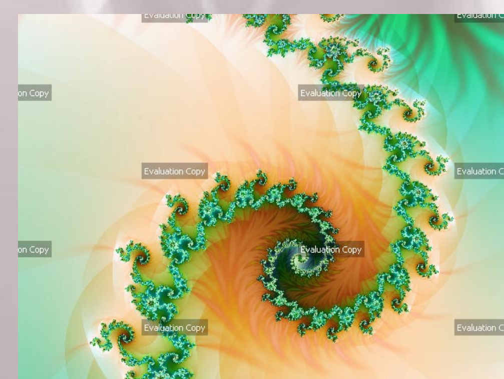




- Podemos encontrar una gran diversidad de opciones fácilmente localizables. A continuación enumeraré algunas de estas:
  - Apertura de un trabajo previamente salvado.
  - Posibilidad de hacer un backup de los cálculos para reanudarlos en otro momento.
  - Conexión a otras máquinas para utilizar la capacidad de procesamiento de estas (esta función la encontramos solamente en la *“Edición Animada”*).
  - Creación de imágenes o video del proceso de iteración y transformación de un fractal (también como característica de la *“Edición Animada”*).
  - Cambio del gradiente de un fractal, de modo que podremos visualizar el fractal con una diversa gama de colores de una determinada paleta (la cual se puede cambiar). A continuación un ejemplo de esta característica:

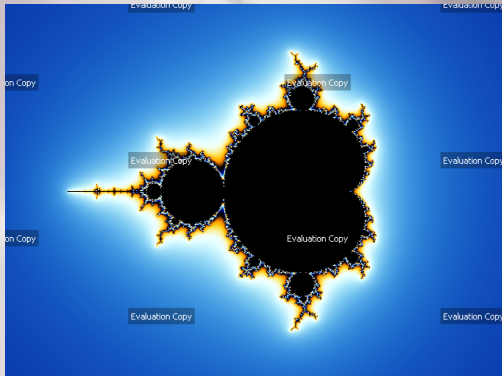
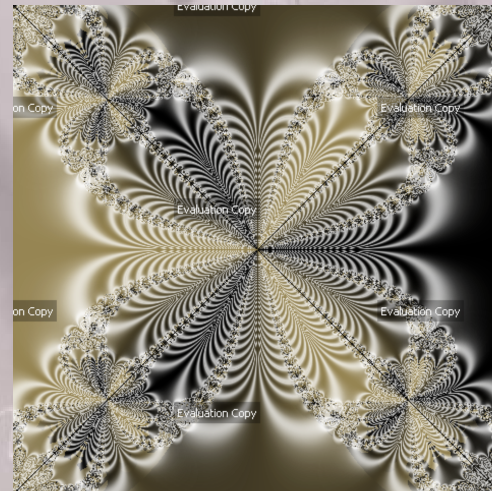
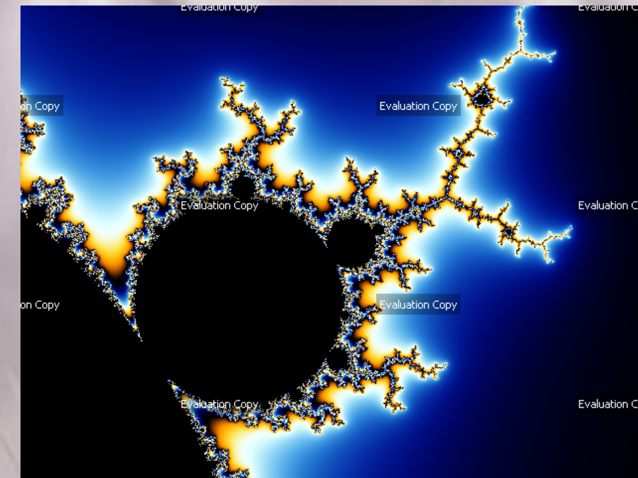
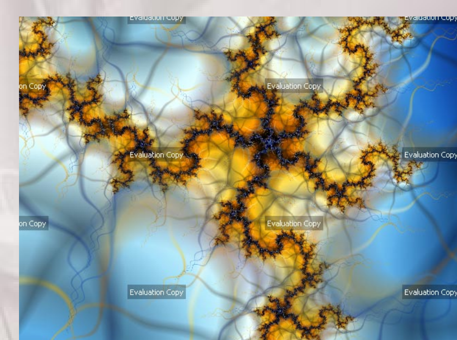


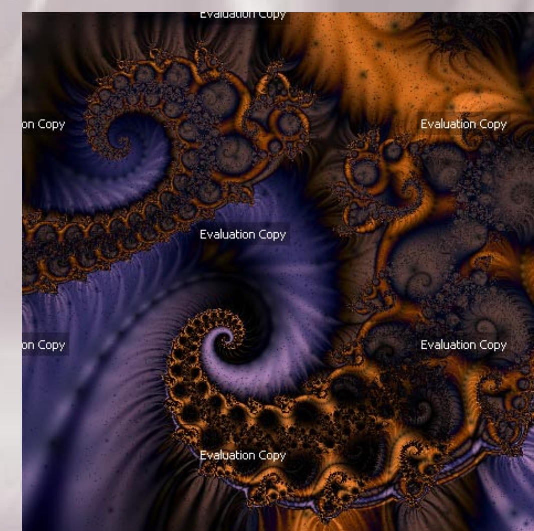
Underwater (base)

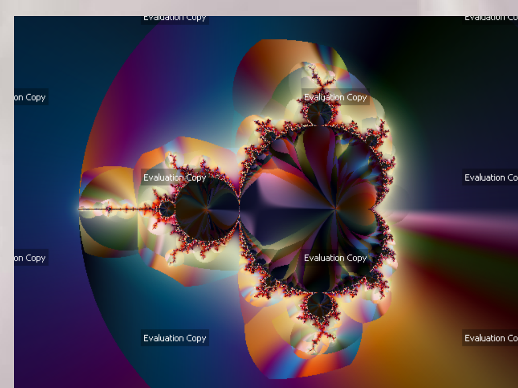


Underwater (con otra gama de colores)

- A continuación algunas imágenes generadas con Ultra Fractal.





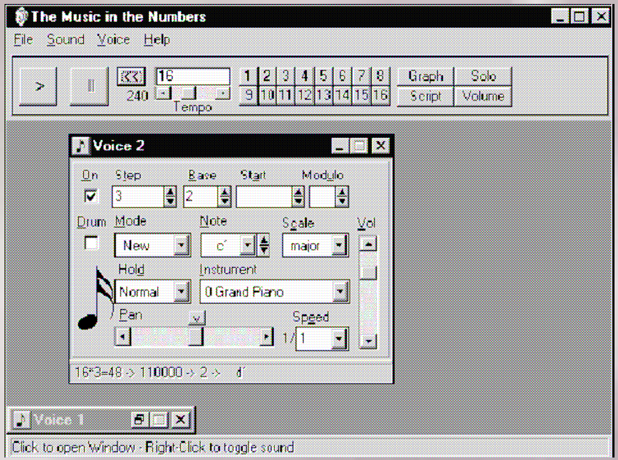
Otros programas

- Fractal explorer: No es tan artístico como Ultra Fractal, aunque posee una opción para generar paisajes fractales en 3 dimensiones.
- Tierazon: También posee la capacidad de crear videos.
- ChaosPro: Otro programa con el que se pueden crear imágenes bastante interesantes. Similar a Ultra Fractal.

Música fractal

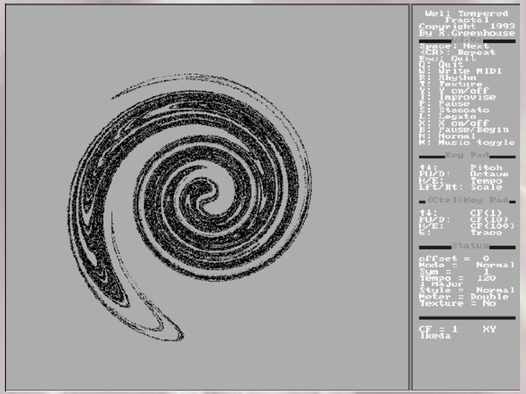
- Además de imágenes, la geometría fractal nos permite crear música.
- Se entiende por música fractal aquella que ha sido generada a partir de la proyección de un espacio musical del comportamiento de un determinado fractal.
- Aunque el fractal sea autosemejante e invariable a la escala, es difícil que la composición musical lo sea; es complicado incluso definir exactamente estos conceptos para una melodía.
- Algunos estudios han encontrado rasgos de autosemejanza en algunas piezas clásicas.
  - La coral situada al final de *"Kunst der Fuge" (1749)* de Johann Sebastián Bach es un ejemplo de pieza autosemejante. En ella los mismo motivos son repetidos una y otra vez con distintas variaciones dentro de una región mayor de la pieza. Varias voces repiten al doble de velocidad la melodía de la voz principal.
  - Se está estudiando la analogía entre la estructura del conjunto de Cantor y la primera *"Ecossaisen"*· de Bethoven, así como entre el triángulo de Sierpinski y el tercer movimiento de la sonata para piano *"15, opus 28"*, del mismo compositor.
  - También se está analizando la autosemejanza de las *"fugas"* de Bach.

- Cada vez son más los compositores que utilizan el caos o la geometría fractal como apoyo en sus composiciones. Dos de ellos son:
  - Phil Thompson
  - Gary Lee Nelson
- Una forma sencilla de crear una melodía es a partir de una secuencia de números positivos e ir asignando a cada uno una determinada nota musical.
- Para obtener un buen resultado es necesario que los valores de la secuencia estén acotados de manera que las notas generadas no pertenezcan a octavas muy alejadas.
- Para crear música de este modo existen programas como por ejemplo Muxinum.

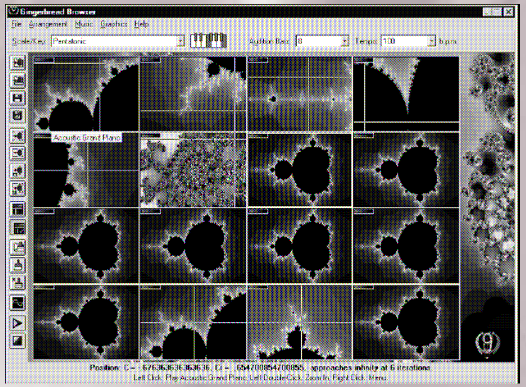


- Para generar música fratal de otros modos podemos encontrar el siguiente software:

The Well Tempered Fractal (TWTF): El objetivo de este software según su autor es producir información musical que los compositores puedan manipular para crear sus piezas. Consiste en seleccionar un sistema caótico, a través del cual, el programa genera aleatoriamente valores para los parámetros del sistema y comienza a dibujar los puntos resultantes. Conforme estos puntos se van dibujando se reproducen las notas correspondientes.



Lmuse: Este programa interpreta sistemas L. Un sistema L reescribe recursivamente una cadena de símbolos según un conjunto de reglas de transformación. La sentencia resultante se interpreta en Lmuse como una serie de órdenes y se representa el dibujo a la vez que genera música.



Otras aplicaciones de los fractales

Computación

- La aplicación de los fractales a este campo es verdaderamente interesante.
- Es la aplicación pionera de los fractales.
- Se aplica la transformación fractal, proceso que se utiliza en el tratamiento de imágenes para reducir su tamaño en memoria física.
- Se utilizó por primera vez en la *“Enciclopedia Multimedia Encarta”.*
- Su uso más extendido se aplica a la compresión de imágenes.

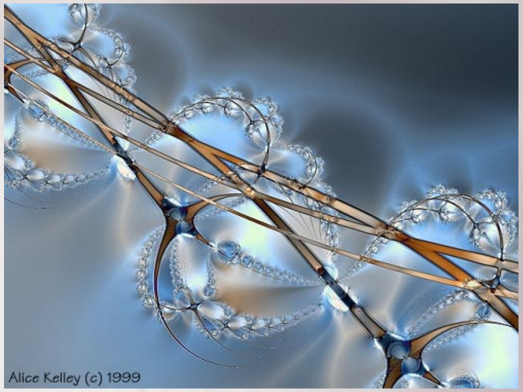


Imagen a 500x375px (148 Kb)

La misma imagen a 20x15px (0,46 Kb)

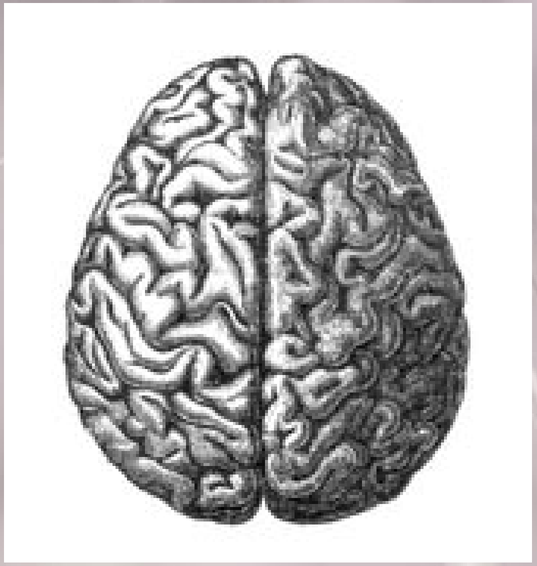
- Como sabemos, los fractales se forman por una “repetición de una imagen”.
- La técnica de compresión consiste pues, en transformar una serie de píxeles en una fórmula, de modo que al descomprimir nuestra imagen, la fórmula se desarrolle para rellenar todos los píxeles que se habían transformado en fórmula. De este modo se reduce el tamaño físico de la imagen, aunque al cargarla haya que llevar a cabo un mayor procesamiento.
- Esto se ha aplicado a compresión de video y de videojuegos.
- Esta técnica también es bastante útil para navegar por la red.

Medicina

- Aunque parezca increíble, los fractales también se han abierto paso en el campo de la medicina.
- Se está estudiando, desde virus fractales hasta la ramificación de determinados tumores malignos.
- También se han llegado a utilizar técnicas fractales para predecir la osteoporosis de los pacientes.
- Esta enfermedad normalmente no se puede detectar hasta que no esté lo suficientemente desarrollada, que es cuando se produce una alteración visible en la textura ósea.

- Con el uso de técnicas fractales se puede predecir la aparición de esta enfermedad, gracias a que la textura ósea guarda una estrecha relación con los fractales.
  - Mediante un programa informático se almacena una muestra de la textura ósea de una persona en estado normal.
  - Más adelante se volvía a tomar otra muestra, ya de una persona propensa a sufrir la enfermedad y se comparan ambas muestras.
  - Como la textura osea evoluciona de forma similar a un fractal, se puede producir cómo esa evolución seguirá su curso y así predecir la enfermedad con antelación y tomar las medidas oportunas para curarla.
- Por otro lado, se estudia el funcionamiento del cerebro para poder localizar un tumor o el daño producido por diversas enfermedades o el consumo de drogas.
- Son muchas las nuevas tecnologías que se aplican a la medicina, compo los escáneres que realizan una resonancia magnética nuclear.
- Las imágenes que se estan obteniendo aportan información a la investigación sobre que el cerebro posee una estructura frcatal.
- Conforme se va amplificando la visión del cerebro se van encontrando más y más detalles, a las estructuras más pequeñas se parecen a las más grandes, lo que nos lleva a pensar que el cerebro posee una autosimilitud.

- El cerebro tiene estructura fractal. La dimensión fractal de la superficie de cerebro es mayor que 2, lo que implica que esta superficie necesita más espacio para llenarse, no es suficiente con dimensión igual a 2.



- Otra aplicación que se lleva a cabo en la actualidad es la regeneración del tejido de la piel.
- También está en fase de investigación la posible regeneración de órganos completos para utilizarlos en transplantes.
- Para acabar, decir que también se estudia una relación similar entra la estructura de los conductos sanguíneos del cuerpo humano y los fractales.

Geografía

- Este es otro de los campos en los que se aplican los fractales.
- La primera de las aplicaciones que se da es el cálculo del camino más cercano o acertado entre dos puntos. Para esto se ha utilizado la curva de Koch. La utilidad real de esto es en el campo de la exploración espacial, puesto que un insignificante error de cálculo a escalas diferentes puede implicar millones de kilómetros de error.